UNIVERZITET "DŽON NEZBIT" BEOGRAD

FAKULTET ZA MENADŽMENT - ZAJEČAR

Doktorska disertacija

MATEMATIČKI MODELI OPTIMIZACIJE POSLOVNIH PROCESA

Mentor

prof. dr Dragiša Stanujkić

Kandidat

mr Nina Petković

Zaječar, 2016.

Mentor :

prof. dr Dragiša Stanujkić, Fakultet za menadžment - Zaječar.

Članovi komisije :

1. prof. dr. Milan Božinović, Ekonomski fakultet, Univerzitet u Kosovskoj Mitrovici.

2. prof. dr Vladica Stojanović, Prirodno - matematički fakultet, Univerzitet u Kosovskoj Mitrovici.

Datum odbrane rada:

Mojim roditeljima

Goce Delčev

" Svetot go razbiram edinstveno kako pole za kulturen natprevar megju narodite"

Abstrakt

Ispred uspešnog menadžera, vodje velike ili male kompanije, u savremenim ekonomskim uslovima na tržištu, kao i brzim protokom informacija, postavlja se bezbroj pitanja, na koja treba pravovremeno i uspešno odgovoriti. Od uspešnog menadžera u svakom slučaju se očekuje da donosi odluke sa kojima treba "pobediti tržište". To podrazumeva ostvariti maksimalan prihod u datim uslovima, a minimizirati troškove, vrlo često, maksimizirati prodaju, što obezbedjuje dobar marketing kompanije, ponekad i na štetu profita, napraviti dobar izbor proizvoda za plasman, i pored mnogih drugih zahteva treba sačuvati zadovoljne radnike. Da bi se sve to postiglo na najoptimalniji način, potrebno je biti i dobar vizionar, odnosno na najbolji mogući način izvršiti prognozu u poslovnim procesima. U svetu žmenadžmenta postoji jedna lepa izreka "The art of Managing is in foreseeing", ili u prevodu "Umetnost menadžmenta je u predvidjanju". U svakom slučaju biti uspešan menadžer, znači baviti se jednom kompleksnom, zahtevnom, preciznom umetnošću, koja pored kontinuirano praćenje savremenih ekonomskih tokova zahteva i jake obrazovne temelje iz različitih oblasti, kao što su Ekonomija, Preduzetništvo, Informatika i sve više poznavanje matema tičkih i statističkih metoda kojima se moze izvržiti optimizacija različitih poslovnih procesa.

Poznavanje matematičkih metoda i modela optimizacije, postaju više nego potre bni, interesantni i neophodni. Otuda i motivacija za bavljenje ovom problematikom i izradom ove doktorske disertacije pod nazivom ***Matematički modeli optimizacije poslovnih procesa****. Ekonomisti u svojim istraživanjima uglavnom koriste statističke metode za obradu podataka, ali mnoge matematičke metode nisu dovoljno poznate i dovoljno iskorišćene. Iz tih razloga u ovom radu bavićemo se nekim poznatim modelima kvantitativne analize, primenićemo ih na konkretna istraživanja, analizirajući različite ekomomske parametare, a postavićemo i neke nove modele.*

Ova disertacija obuhvata metode Nelinearnog programiranja, koje je izuzetno vazno za situacije u kojima se javljaju nelinearni uslovi, gde nije moguće primeniti klasično Linearno programiranje, i tom metodom će biti rešen problem maksimiziranja prodaje u istraživanju sprovedenom u kompaniji Delhaize u Zaječaru. Zatim Di-

namičko programiranje, kao specijalan slučaj Nelinearnog programiranja, što će biti iskorišćeno za istraživanje sprovedeno u Fabrici mernih transformatora u Zaječaru u traganju za najoptimalnijom raspodelom sredstava u proizvodnji izabranih transfo-ratora. Metoda Markovljevih lanaca , kao nedovoljno iskorišćena, a vrlo jednostavna biće primenjena, po prvi put na Beogradskoj berzi u predvidjanju značajnom za investitore , a koje se odnosi na najbolji izbor akcija za investiranje. I na kraju, zanimljiva Teorija igara biće primenjena u ekonomskom smislu, odnosno biće postavljen originalan model u marketing odlučivanju. Za neka od istraživanja, napravljene su i softverske analize, čime njihovo značenje je još veće, a softverski paketi mogu da se iskoriste i za druga istraživanja, gde se može postaviti sličan model.

Naučni doprinos ove doktorske disertacije ogleda se, pre svega, u teoriskom i empirijskom smislu. U teoriskom smislu su iskorićene neke poznate metode i postavljeni modeli za konkretna istraživanja, a ujedno su napravljeni i originalni metodi. U empiriskom smislu dobijeni su rezulatati, koji mogu da budu od značenje za kompanije u koje su istraživanja izvršena. Pored toga, otvorena su i mnoga pitanja za buduća istraživanja. Mogu da se proučavaju razne druge metode, postavljaju novi modeli, uporedjuju rezultati dobijeni različitim metodama, da se ispituje kompatibilnost različitih metoda, itd.

***Ključne reči**: nelinearno programiranje, maksimiziranje prodaje, dinamičko programiranje, optimalna raspodela sredstava, markovljevi lanci, berza akcija, marketing odlučivanje, Teoriji igara.*

Mathematical Models in Busniss Process Optimization

Abstract

q*In a modern business market q by the rapid flow of information, a successful manager, the leader of either a small or a large enterprise, faces a number of questions that have to be dealt with duly and successfully. The successful manager is always expected to make decisions which will ultimately 'conquer the market'. This means making maximum profit under the given conditions and cutting costs as much as possible at the same time, maximizing sales through a good company marketing and sometimes at the expense of the profit itself, selecting the right products to launch in the market and, besides a number of business issues and requirements, keeping the company's workers satisfied at the same time. It requires a good visionary to accomplish all this in the most effective way, that is, he or she has to make businesspredictions in the best way possible. There is a saying 'The art of managing is in foreseeing.' In any case, being a successful manager means dealing with a complex, demanding and precise art which involves keeping up with the current economic trends andhaving a solid educational background in various fields such as economics, entrepreneurship, computer sciences and increasingly the knowledge of mathematical and statistical methods used in managing and optimizing a company's business processes. The knowledge of mathematical methods and models when managing and optimizing a company's business processes has become interesting but alsoa necessitymore than ever. This is the reason and the source of motivation for writing this PhD thesis titled 'Mathematical Models in Business Process Optimization'. Statistical methods for data processing have mainly been used by economists while many mathematical methods have not been known or used enough. Therefore, this thesis deals with a number of well-known quantitative methods which are applied to concrete research after which different economic parameters are analyzed; it also offers new models. The thesis deals with nonlinear programming methods, which is extremely important in nonlinear conditions when classical linear programming is impossible* *to use. This nonlinear method is used to solve the sales maximization problem in the research conducted in Delhaize Company in Zajecar. Then there is dynamic programming as a special case of nonlinear programming used in the research carried out in Measuring Transformers Factory in Zajecar when we tried to find the most optimal resource allocation of the chosen transformers. Markov chains, a quite simple but insufficiently used method, will be applied for the first time at the Belgrade stock exchange to solve the problem of choosing the best shares to buy, a significant issue for investors. And finally, there is the interesting Game theory whoseoriginal model will be applied in marketing decision-making. There are software analyses for certain research, which only adds to their significance, not to mention that software packages may be used for other research with similar models. The scientific contribution of this PhD thesis is both theoretical and empirical. As far as the theory is concerned, the thesis uses a few well-known methods and makes models for concrete research while offering new methods at the same time. When it comes to practical importance, the companies in which the research has been conducted can use the concrete results to improve their business. Besides, this thesis has opened the door to future research. A number of methods can be studied, new models can be made, results compared, compatibility of different methods questioned, etc.*

Key words: *Nonlinear programming, sales maximization, dynamic programming, resource allocation, Markov chains, stock exchange, Game theory, marketing decision-making.*

Sadržaj

Glava 1

Organizacija i struktura projekta

1.1 Problem istraživanja

Ekonomski problemi koje razmatramo u okviru teme **Matematički modeli optimizacije poslovnih procesa** motivisani su pre svega naglim razvojem modernih tehnologija, kao i razvojem globalnog tržišta, što svakako otvara osnovno pitanje metodologije upravljanja poslovnim procesima u savremenim uslovima kada je konkurentnost na tržižištu sve veća čime je rizik donošenja poslovnih odluka od strane menadžmenta znatno uvećan, a koji u nekim slučajevima može da ima nesagledive posledice na konačno finansijsko poslovanje kompanija. Otuda su sve veći zahtevi za profesionalizacijom upravljačkog menadžmenta, a poslovne odluke moraju se donositi na utemeljenim egzaktnim ekonomskim parametrima.

Do relanih parametara koji opisuju neki polsovni proces ili tržište u opšte, posebno finansijsko, moguće je doći samo primenom metoda kvantitativne analize, tj. primenom raznih matematičkih modela optimizacije pojedinih situacija u poslovanju preduzeća, što menadžmentu omogućuje donošenje kvalitetnih poslovnih odluka. Ovakav pristup upravljanju poslovnim procesima može na neki način da obezbedi efikasno upravljanje i konačno stvaranje profita, što je svakao glavni cilj svake kompanije.

Polazeći od napred navednih činjenica nazire se problematika kojom se bavimo u okviru ove teme. Naime, s'obzirom da je krajnji cilj svake kompanije ostvarenje maksimalne dobiti uz minimalne troškove proizvodnje, to je u fokusu naših opservacija postavljeno preduzeće kao sistem raznih tehnoloških procesa i kao takvo uzeto za predmet istraživanja u smislu analize poslovanja, otkrivanja nedostataka u organizaciji proizvodnje, analize mogućnosti da se neki parametri proizvodnje optimiziraju primenom odgovarajućeg matematičkog aparata, kako bi se maksimizirala dobit.

Sozirom da svaku proizvodnju obavezno prati i pitanje uticaja te proizvodnje na spoljnu sredinu, dakle, reč je o ekologiji u opšte, to se kao problem istraživanja, samo po sebi, nameće i pitanje zagadjivanja spoljne sredine kao i mogućnost optimizacije raznih ekoloških konflikata koji su obavezni pratioci većine tehnoloških procesa.

Na kraju, osnovna svrha bilo kakve proizvodnje jeste pozicioniranje kompanije, kako na domaćem tako i na globalnom tržištu, čime se kompanija izlaže neprekidnim izazovima konkurencije. Osim tržišta uopšte, skoro svaka ozbiljna kompanija nužno se pojavljuje i na raznim finansijskim tržištima kao što su tržišta hartija od vrednosti, tržiste akcija, berze itd. U ovom slučaju kao verni pratilac poslovanja u ovom segmentu pojavljuje se jedan od fundamentalnih problema svake ekonomije a to je **rizik** poslovanja uopšte, a pre svega rizik pri investiranju, bilo da se radi o investicijama u okviru predizeća, na primer, investiranje u nove tehnologije, u nove proizvode ili rad na finansijskim tržištima. Metodologija A.A. Markova, tj. Teorija Markovljevih lanaca na jedan neposredan način opisuje i problem rizika, ma da postoje i druge metode koje direktnije u svoj algoritam uključuju i problem rizika, kao što je Teorija Markovica o diversifikaciji rizika. Naravno, kakve god teorije da smislimo rizik kao takav se ne može apsolutno anulirati, možemo govoriti samo o njegovom minimiziranju.

1.2 Predmet i cilj istraživanja

Matematičko modeliranje kao metodologija i proces koji se kontinuirano odvija u raznim naučnim oblastima kao što su **Operaciona istraživanja**, specijalno deo koji se odnosi na ekonomiju, zatim oblast **Kvantitativne analize**, neprekodno motiviše naučnike za kreiranjem novih matematičkih modela kao i primenu postojećih u raznim konfliktnim situacijama koje mogu nastupiti u svakoj ekonomiji, pa i u onim najrazvijenijim. Egzaktnih primera ima dosta. Na primer, problem inflaacije, berzanski krahovi pojedinih indeksa tj. velike oscilacije cena pojedinih roba koje utiči na stabilnost novčanih valuta kao što su plemeniti metali, energenti itd, promašene investicije, kao i niz raznih drugih uticaja na ekonomiju u opšte, od kojih se mnogi i ne mogu predvideti.

Dakle, predmet istraživanja, koijim smo se bavili u okviru ove teme, su razni matematički modeli optimizacije i njihove primene na rešavanje onih pitanja koja su pre svega vezana za poslovanje pojedinih kompanija koje su nam dale saglasnost za pristup raznim podacima iz oblasti njihovog poslovanja.

Osim toga isražívali smo primenu nekih matematičkih modela na ponašanje nekih ciljnih grupa u oblasti usluga kao što je obrazovanje, itd.

Cilj istraživanja u okviru navedene teme, odnosi se pre svega na ispitivanje mogućnosti primene nekih matematičkih modela u rešavanju problema u procesima proizvodnje onih kompanija u kojima nam je bio moguć pristup. Na žalost u nekima to nije bilo moguće. Osim ispitivanja primene poznatih modela, učinjen je i pokušaj konstrukcije nekih originalnih kao i njihova primena.

1.3 Generalne i posebne hipoteze

Osnovna hipoteza od koje smo pošli u okviru navedene teme može se formulisati na sledeći način:

Prilagodjavanjem nekih poznatih matematičkih modela kvantitativne analize, kao i razvojem novih, moguće je izvršiti optimizaciju raznih konfliktnih situacija u poslo vnim procesima.

Pomoćne hipoteze su:

1. *Metodom nelinearnog programiranja moguće je izvršiti optimizaciju funkcije ukupnih prihoda u nelinearnim uslovima.*

2. *Metodom dinamičkog programiranja, kao specijalni slučaj nelinearnog programi-*

ranja, moguće je izvršiti optimalnu raspodelu sredstava za investiranje.

3. *Metodom Markovljevih lanaca moguće je dati prognozu promena raznih ekonomskih parametara, kao što je: promena prinosa akcija na berzi, ponašanje potrošača itd.*

4. *Matematičke modele Teorije igara moguće je primeniti u optimizaciji raznih ekonomskih situcija kao što je, na primer, marketing odlučivanje.*

1.4 Metode istraživanja

U matematičkoj teoriji postoji veoma veliki broj metoda i algoritama koji se primenjuju ili se mogu primeniti u opisivanju raznih problema kako u ekonomskoj nauci tako i u drugim oblastima u kojima se javlja potreba za optimizacijom raznih konfliktnih situacija. S'obzirom da predložena tema ima pre svega matematičku dimenziju, to su i metode prilagodjene toj ideji. S tim u vezi koristiće se metodologije razvijene u okviru Teorije Linearnog i Nelinearnog programiranja, dinamičkog programiranja kao specijalni slučaj metode nelinearnog programiranja. Jedna od modernijih teorija koja sve više nalazi primenu u ekonomiji ali i drugim naučnim oblastima jeste Teorija igara čije modele ćemo takodje koristiti u optimizaciji nekih ekonomskih problema. Osim navedenih, korišćene su i metode Matematičke statistike i Teorije verovatnoća, kao posebne, ali i u kombinaciji sa nekim drugim metodologijama, naprimer, Teorijom igara, Slučajnih procesa i vremenskih serija koje danas predstavljaju nezaobilazan alat u prognozi raznih ekonomskih procesa koji se egzaktno ne mogu opisati, ali se za njih može dati prognoza sa dovoljno velikom verovatnoćom za njihovu realizaciju. Ovo je posebno interesantno kada su u pitanju neka kretanja na finasijskim tržištima, berzama itd. Jedna od Teorija koja se pored napred pomenutih veoma često koristi jeste Teorija Haosa, Vremenskih serija i slučajnih procesa, a koje su u okviru ovoga rada takodje korišćene, specijalno, Markovljeva Teorija ili Teorija Markovljevih lanaca kojom se mogu pratiti sva kretanja na finasijskim tržištima ii berzama što je u ovom radu i učinjeno.

1.5 Očekivani naučni doprinos

Polazeći od metodologije i načina organizovanja istraživačkog procesa u okviru navedene teme, može se zaključiti kada je naučni doprinos ovoga rada u pitanju da ima višestruki značaj i to **naučni**, koji se može posmatrati u dva oblika i to **empirjski** i **teorijski** kao i **društveni**.

Empirijski značaj sastoji se pre svega u primeni postojećih metoda i modela kvantitativne analize i operacionih istraživanja, vezanih za ekonomsku problematiku, na istraživanje poslovnih procesa i optimizaciju nekih njihovih faza u kompanijama koje su nam dozvolile pristup svojim podacima i poslovanju u opšte.

Naučni doprinos ovoga rada i rezultata koji su u njemu izloženu, u teorijskom smislu, ogleda se pre svega u činjenici da su empirijska istraživanja u nekim kompanijama generisala kreiranje nekih novih modela optimizacije ka što je, na primer, matematički model koji se može primeniti u oblasti marketinga, zatim ekologije i na samo u ekologiji već i u raznim drugim oblastima, tj. u svakoj situaciji koja se može modelirati na ovaj način. Na primer, u vojsci, primena bioloških sredstava u eventualnim vojnim sukobima može se optimizirati ovim modelom, zatim u biologiji i svakako u raznim ekonomskim konfliktnim situacijama.

Očigledno da navedena tema obuhvata veoma širok spektar problema i naučnih oblasti u kojima se vrše istraživanja, što za posledicu ima mogućnost primene veoma različitim matematičkih metodologija i modela od kojih su u okviru ovoga rada prezentirani samo neki od njih. Na taj način ova tema otvara mogućnost daljih istraživanja u oblasti operacionih istraživanja i kvantitativne analize, što je važno za nove istraživače koji žele da se bave ovom problematikom.

Društveni značaj ove teme i rezultata do kojih se došlo u okviru ovoga rada sastoji se, pre svaga, u veoma širokoj primeni matametičkih teorija i modela čija je primena u ovom radu prezentirana u kompanijama koje smo istraživali u okviru ove teme i na taj način pokazali njihov značaj da i druge kompanije sa sličnom problematikom mogu rešavati svoje probleme u poslovanju i organizaciji proizvodnje uopšte.

1.6 Struktura disertacije

Sadržaj i struktura razmatranih problema u okviru ove teme je dosta širok i raznovrstan, što je uslovljeno činjenicom da su nas neke kompanije, za koje smo bili zainteresovani za istraživanjem njihovih poslovnih procesa proizvodnje ili usluga, prihvatile i omogućile pristup svojim podacima, dok su nas neke odbile sa ili bez obrazloženja, što je svakako imalo uticaja na samu strukturu i sadžaj teme kojom smo se bavili.

U Glavi 1. opisana su neka uvodna razmatranja vezana za samu temu a koja se odnose pre svega na problem i cilj istraživanja, postavku osnovne i pomoćnih hipoteza, metodologiju istraživanja, naučni doprinos koji ova tema nudi kao i opis dobijenih rezultata, specijalno onih koji su značajno doprineli istraživanju u ovoj oblasti.

U Glavi 2. izložena je metodologija nelinearnog programiranja kao i opšti mate matički model kojim se mogu realozovatii optimizacije nekih ekonomskih problema. Neki od njih opisani su u okviru dobijenih rezultata koji su takodje izloženi u u okviru Glave 2.

Nelinearno programiranje kao metodologija je veoma interesantna i značajna u istraživanju raznih oblasti pa i u ekonomiji, pre svega zbog činjenice da je broj nerešenih problema nelinearnog tipa daleko veći od problema koji su linearnog tipa i kao takvi mogu se rešavati metodologijom linearnog programiranja u kojoj postoje standardni modelii optimizacije kojim se može rešiti svaki zadatak ovakvog tipa.

Sa druge strane rešavanje nelinearnih problema, posebno u ekonomiji, je veoma komplikovano s'obzirom da ne postoje univerzalne metode za rešavannje pojedinih slučajeva, pa je otuda svaki ovakav zadatak problem za sebe, što istraživače stavlja pred problem da se za svaki takav zadatak moraju smislti originalne metode za njegovo rešavanje. Ako se takve specijalne metode i kreiraju, javlja se drugi otežavajući problem a to su pre svega veoma komplikovane procedure koje zahtevaju veliki broj matematičkih operacija koje treba izvršiti da bi se došlo do konačnog rešenja. Ova činjenica za posledicu ima sastavljanje čitavih timova stručnjaka: ekonomista, matematičara, kao i programera s'obzirom da zadatke nelinearnog tipa većih dimenzija nije moguće rešiti bez primene računara. Dakle, za svaki zadatak nelinearnog tipa mora se konstruisati originalni matematički model kao i odgovarajuća softverska aplikacija kojom se dati model može rešiti na računaru, a zatim se vrši postoptimalna analiza dobijenih rezultata, izvlače potrebni zaključi, sugestije i predlozi koje dalje koristi menadžment kompanije.

U Glavi 3. opisani su osnovni elementi Teorije dinamičkog programiranja, koja se javlja kao specijalni slučaj nelinearnog programiranja. Ova teorija je od posebne važnosti za rešavanje raznih upravljačkih zadataka u ekonomiji posebno. Na pimer, značajna je njena primena u donošenju odluka u oblasti investicija, proizvodnom programu preduzeća, zatim u bankarstvu i mnogim drugim segmentima ekonomije i u opšte dinamičko programiranje je metodologija kojom se može kreirati organizacija upravljanja raznim poslovnim procesima.

U istraživanju koje smo realizovali tokom izrade ovoga rada, uradjen je jedan takav model na primeru kompanije **Maxi** u Zaječaru gde smo prvo metodom aproksimacija odredili funkcije prihoda $P(x)$ i troškova $T(x)$, zatim je konstruisan model nelinearni matematički model kojim je izvršeno maksimiziranje prodaje robe uz odredjena ograničenja na funkciju dobiti.ovi rezultati publikovani su u [66].

Takodje, osim ove kompanije, metdom dinamičkog programiranja kao specijalnim slučajem nelinearnog programiranja analizirano je i poslovanje kompanije FMT - a, tj. fabrike mernih transformatora u Zaječaru, a koji su publikovani u časopisu [67]

Glava 4. posvećena je Teoriji slučajnih procesa i vremenskih serija, specijalno, razmatrani su Markovljevi lanci i njihova primena na Beogradskoj berzi i posmatrali deset kompanija, kretanje njihovih akcija kao i prinose koje one daju. Osim toga, u sektoru usluga, tj. obrazovanja, istraživali smo opredeljenost maturanata u Okrugu Zaječar i Bor za upis na pojedine faklultete u Srbiji pa izmedju ostalog i na FMZ u Zaječaru i dali dugoročnu prognozu njihovog interesovanja za pojedine fakultete.

Inače ova teorije ima veliki praktični značaj s'obzirom da ima široke mo gućnosti primene u raznim oblastima ekonomije. Na primer, izmedju ostalog može se primeniti u istraživanju tržišta, konkretno ovom metodom može se ne samo opisati, već i predvideti, ponašanje potrošača sobzirom na tražnju nekih proizvoda, koju želimo da testiramo.

Glava 5. u celosti je posvećena Teoriji igara, koja u optimizaciji veoma različitih konfliktnih situacija u ekonomiji ima veliku primenu. Problem koji smo mi razmatrali odnosi se na primenu ove teorije u marketing odlučivanju. Rezultati do kojh smo došli su originalni i objavljeni su u zborniku radova medjunarodne konferencije MIT 2013 zajedno sa Univerzitetom iz Ruske federacije. Ova konferencija održava se svake druge godine u saradnji sa univerzitetom iz Ruske federacije: **Institute of Computational Technologies, Siberian Brunch of the Rusian Academy of Sciences, Novosibirsk,** i njihovim naučnicima, a rad koji smo objavili na toj konfereneciji ruski deo organizacionog odbora izabrao je 10. najboljih radova medju kojima je ušao i naš rad, [1]

Za matematički model koji je ovde konstruisan za potrebe odlučivanja u marketingu, kreirana je i originalna softverska aplikacija kojom se simuliraju neki stati stički parametri.

[1]Stojanović V, Božinović M, Petković N.: *Softvare implementacion of the model of game theory in marketing decisions*, Medjunarodna konfernecija MIT, Vrnjačka Banja, 2013.

Glava 2

Neke primene nelinearnog programiranja u ekonomiji

U okviru ove glave izlažemo empirijske rezultate do kojih smo došli istraživa njem, a koji su dobijeni u kompaniji **Dheleze group** u Zaječaru. Metodologija kojom smo se u ovom slučaju koristili uglavnom se odnosi na nelinearno programiranje. Naime, radi se o matematickom modelu koji u prirodi, a posebno u ekonomiji, pokriva mnogo veći deo ekonomskih problema, od dela ekonomskih problema koji se mogu rešavati matematičkim modelima linearnog programiranja. Otuda i motivacija da upotrebimo ovaj matematički aparat, s'obzirom da su i problemi koje smo otvorili za rešavanje nelinearnog tipa. Osim toga, na početku, važno je istaći da ni za jedan ekonomski problem nelinearnog tipa, ne postoji univerzalni matematički model kojim se optimizacija nekog upravljačkog procesa može realizovati, već je za svaki od njih neophodno konstruisati poseban matematički model kojim se rešava samo taj konkretni slučaj.

Imajući u vidu obim i veličinu problema koji se mogu pojaviti, skoro da je nemoguće izbeći kreiranje originalne softverske aplikacije kojom bi se postavljeni matematički model rešio uz pomoć računara, što smo i mi u okviru ove teme cinili u nekoliko navrata. Naime, za neke od problema kreirani su originalne softverske aplikacije za rešavanje matematičkoh modela na računaru, koje smo tokom istraživanja postvili kao problem.

Dalje, opisaćemo opštu proceduru pripreme za dobijanje konačnog rešenja postavljenog problema jednog **upravljačkog zadataka** bez obzira na metode kojima će se on rešavati, linearnim ili nelinearnim programiranjem, što u krajnjem slučaju zavisi od same prirode zadatka i vrste modela kojim on treba da se reši.

Ova glava u potpunosti je posvećena primeni, nelinearnog programiranja, dakle, u slučaju kada je ekonomski problem koji se rešava nelinearnog tipa.

2.1 Opšti matematički model

U opštem slučaju, matamatički modeli nelinearnog kao i linearnog programiranja su veoma slični. Naime i jedan i drugi imaju sledeću strukturu, tj. svaki od njih sadrži sledeća četiri elementa:[1] [2]

1. **Funkcija cilja**
2. **Skup ograničenja**
3. **Uslov nenegativnosti**
4. **Matematički model .**

Mogućnost formiranja Funkcija cilja, jeste jedan od osnovnih uslova svakog upravljačkog zadatka i ona mora unapred biti definisana. U opštem slučaju jedan problem se može sastojati iz više različitih celina ili faza, kao što je to slučaj kod dinamičkog programiranja.

U matematičkom obliku funkcija cilja se izražava nekom funkcijom $F(\mathbf{x})$, gde je

$$\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$$

n-dimenzionalni vektor. U ovom slučaju, $F(\mathbf{x})$ je funkcija više promenljivih, za koju potrebno odrediti ekstremnu vrednost.

Funkcija cilja se **minimizira** , zavisno od problema koji se rešava, na primer, ako opisuje troškove, utrošak ma kakvog resursa, vreme izvršenja nekog projekta u

[1] Božinović M. : *Operaciona istraživanja.* Ekonomski fakultet Kosovska Mitrovica, 2012.

[2] Milovanović G, Stanimirović P.: *Simbolička implementacija nelinearne optimizacije*, Niš, 2002.

zadacima mrežnog planiranja, razne vrste gubitaka u proizvodnji, ili ako u problemu transporta ona predstavlja vreme itd.

Obratno, ako funkcija cilja opisuje ukupnu dobit kompanije, ukupne prihode, itd, tada se ona **maksimizira**, vidi [55][3]

Skup ograničenja, označićemo ga sa L i utvrdjuje se za svaki upravljački zadatak posebno. Skup ograničenja je sistem od m jednačina ili nejedna čina od promenljivih $x_1 \ldots, x_n$ (koje se koriste i u funkciji cilja). Generalno, skup ograničenja predstavlja skup **hiper površina** ili **hiper ravni** n-dimenzionalnog prostora, vidi, [14][4] kojima je ograničen domen, a koji ćemo označiti sa D. Iz domena D se bira onaj vektor $\mathbf{x}$ koji inicira ekstremnu vrednost ciljne funkcije $F(\mathbf{x})$. Sve moguće vrednosti za $\mathbf{x}$ iz domena D nazivaju se **dopustivim planom,** a onaj vektor $\mathbf{x}$ koji obezbedjuje da funkcija $F(\mathbf{x})$ ima ekstremnu vrednost naziva se **optimalnim planom.** Pored skupa ograničenja L postoji i prirodni skup ograničenja koji se sastoji u tome da komponente vektora $\mathbf{x}$ moraju biti nenegativne veličine tj. $x_i \geq 0$, $i = 1, ..., n$, koji je u zadacima ovakvog tipa pznat kao uslov nenegativnosti.

2.2 Formulacija zadatka

Optimizacija je postupak nalaženja najboljeg rešenja nekog problema pod odredjenim odredjenim uslovima, koji su obično formulisani samim problemom koji se želi rešavati. Neophodne pretpostavke za ostvarenje zadatka optimizacije su:

1. Optimizacioni zadatak, koji u opštem slučaju može biti proizvoljni proces, ljudska delatnost itd.

2. Funkcija cilja, kao kriterijum optimalnosti.

Najbolja vrednost funkcije cilja $F(\mathbf{x})$ naziva se **ekstremum** ili **optimumalna vrednost**.

Za problem koji treba rešiti konstruišemo funkciju cilja, $F(\mathbf{x})$, pri čemu biramo

[3]Milovanović G, Stanimirović P.: *Simbolička implementacija nelinearne optimizacije*, Niš, (2002)

[4]Božinović M., Stojanović V.: *Matematichke metode i modeli u ekonomiji preduzeą*. VŠSS, Leposavić, (2005).

i odgovarajući metod za izračunavanje njene ekstremne vrednosti. Kriterijum za izbor konkretnog metoda biramo na osnovu postavljenih ciljeva kao i same prirode zadatka koji se optimizuje, dok je konstrukcija ciljne funkcije $F(x)$, tj. **formulacija cilja**, osnovni uslov za pravilno rešavanje postavljenog problema koji se optimizira.

U praksi proces optimizacije realizuje se na taj način što se konstruiše uprošćeni matematički model problema koji želimo da rešimo tj. optimiziramo. Dalje, na osnovu postavljenog modela formira se funkcija cilja $F(x)$, a zatim se vrši karakterizacija posmatranog problema ulaznim, $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, i izlaznim $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_m)$ parametrima, koji su u okviru postavljenog matematičkog modela povezani sistemom funkcija sledećeg oblika:

$$y_j = f_j(\mathbf{x}), \qquad j = 1, \ldots, m\,. \tag{2.1}$$

Kriterijum optimalnosti jeste funkcija ulaznih i izlaznih parametara:

$$F = F(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

Medjtim, iz (2.1) sledi da ciljna funkcija F zavisi samo od upravljačkih parametara

$$F = F(\mathbf{x}) = F(x_1, \ldots, x_n).$$

U praksi skup upravljačkih parametara $x_i, i = 1, \ldots, n$ je ograničen, tj. oni se mogu menjati unutar dozvoljenog prostora D_x, pri čemu moraju ispunjavati sledeće uslove:

$$x \min_i \leq x_i \leq x \max_i, \qquad i = 1, \ldots, n \tag{2.2}$$

$$x \in D_x\,. \tag{2.3}$$

Zadatak optimizacije definiše se na sledeći način: traži se maksimum funkcije cilja

$$F(\mathbf{x}) = F(x_1, \ldots, x_n), \tag{2.4}$$

tako da $x \in D_x$, pri čemu se upravljačkim parametrima nameću uslovi definisani funkcijama koje su zadane u obliku jednačina ili nejednačina::

$$\phi_l\,(x_1, \ldots, x_n) = \phi_{\,0_l}, \quad l = 1, ..., m_1 < n, \tag{2.5}$$

$$\psi_j\,(x_1, \ldots, x_n) \leq \psi_{\,0_j}, \quad j = 1, ..., m_2. \tag{2.6}$$

Funkcija cilja može da bude **linearna** ili **nelinearna**, zavisno od toga kakva je linearnost funkcije $F(\mathbf{x}) = F(x_1, \ldots, n)$, tj. da li je ona linearna ili nelinearna. Zadatak matematičkog programiranja se sastoji u odredjivanju vektora

$$\mathbf{x}^* = (x_1^*, \ldots x_n^*)$$

koji predstavlja rešenje sledećeg zadatka:

$$\min F(\mathbf{x})$$

$$g_i(x) \geq 0, \qquad i = 1, ..., m, \tag{2.7}$$

$$h_j(x) = 0, \qquad j = 1, ..., p.$$

Ako je ciljna funkcija F linearna i ako su linearne i funkcije g_i, $i = 1, \ldots, m$ i h_j, $j = 1, \ldots, p$, sadržane u ograničenjima, tada zadatak (2.7) predstavlja zadatak **linearnog programiranja**.

Ako je bar jedna od tih funkcija **nelinearna**, tada se dobijeni problem naziva zadatak **nelinearnog programiranja**. Ako uslovi u (2.7) odsustvuju radi se o bezuslovnoj optimizaciji, a inače se rešava problem uslovne optimizacije. Algoritam za nalaženje maksimuma može da se iskoristi za nalaženje minimuma, kojije u teoriji LP-a poznat kao dualni problem:

$$\min F(\mathbf{x}) = -\max(-F(\mathbf{x})).$$

Takodje važi i obrat:

$$\max F(\mathbf{x}) = -\min(-F(\mathbf{x})). \tag{2.8}$$

2.2.1 Neke primene NLP-a u ekonomiji

Rezultati izloženi u okviru ove sekcije objavljeni su u časopisu *Facta univerzitatis*, br.4. za 2015. godinu, vidi [66][5] a dobijeni su tokom istraživanja tj. anketriranja potrošača u kompanijama **Deleze group** u Zaječaru.

[5] N. Petković, M. Božinovic : *Maksimizing sales under conditions of nonlenarity*, Facta univerzitatis, No 4.,2015. Niš.

Kako je napred navedeno svaki problem nelinearnog tipa koji se želi modelirati nekim od modela nelinearnog programiranja zahteva specijalnu matematičku pripremu konkretnog modela pošto opšti metod za rešavanje zadataka ovoga tipa ne postoji. To ćemo i mi u ovom slučaju konstrisati matematički model koji opisuje samo navedeni problem. Naime, u ovom slučaju razmatramo situaciju kada preduzeće želi da maksimizira prodaju svojih proizvoda u uslovima nelinearnosti. Primer koji razmatramo, takodje dobro ilustruje Kun - Takerove potrbne i dovoljne uslove da funkcija cilja u odredjenoj tački postiže svoju maksimalnu vrendost.

2.2.2 Uslovi optimalnosti Kun-Takera

Analizom funkcija koje proizilaze iz direktnog i dualnog Lagrange-ovog zadatka, koji su poznati u teoriji NLP - a, može se doći do niza činjenica, koje, pre svega, daju potrebne i dovoljne uslove optimalnosti rešenja oba problema. Osnovu za njegovu primenu daju poznate teoreme Khun-Tucker-a, koje zauzimaju značajno mesto u teoriji konveksnog programiranja.[6][7][8][9]

Neka je X neprazan otvoren skup iz $\mathbb{R}^n$, a $f, g_1, \ldots, g_m$ ranije definisane realne n-dimenzionalne funkcije. Razmotrimo opet problem minimizacije funkcije $f(\mathbf{x})$ pri uslovima $\mathbf{x} \in X$ i $g_i(\mathbf{x}) \leq 0,\ i = 1, \ldots, m$. U tom cilju, fiksirajmo proizvoljnu dopustivu tačku $\mathbf{x}_0 \in X$ i označimo

$$I = \Big\{ i \,\Big|\, g_i(\mathbf{x}_0) = 0 \Big\}.$$

Pretpostavimo, dalje, da su funkcije f i g_i diferencijabilne u tački x_0, a vektori $\nabla g_i(\mathbf{x}_0)$ za $i \in I$ linearno nezavisni, gde za finkciju $f(x)$ operator ∇ znači sledeće:

$$\nabla = \left(\frac{\partial f(x_0)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_2}, \ldots \frac{\partial f(x_0)}{\partial f(x_n)} \right).$$

Operatora ∇ za funkciju $g(x)$ ima isto značenje kao i za funkciju $f(x)$, .

[6]Kurepa S.: *Matematička analiza* 1, Tehnička knjiga Zagreb,1975.

[7]Kurepa S.: *Matematička analiza* 3, Tehnička kniga zagreb, 1975.

[8]Kurepa S.: *Konačno dimenzionalni vektorski prostori i primene*, Sveučilišna naklada - Liber, Zagreb, 1976.

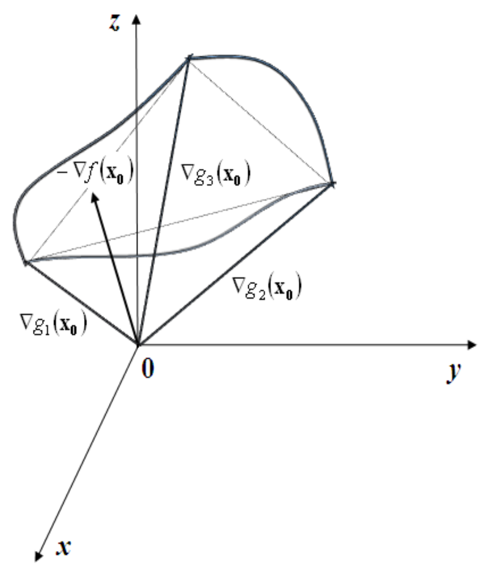
[9]Ljaško I.I.: *Matematička analiza 3*, Viša Škola, Kiev, 1987.

Tada važi

Teorema 2.2.1. (potrebni uslovi Khun-Tucker-a). *Ako je* $\mathbf{x}_0 \in X$ *tačka lokalnog optimuma postavljenog zadatka optimizacije, onda postoje brojevi* $u_1, \ldots, u_m$ *takvi da je*

$$\nabla f(\mathbf{x}_0) + \sum_{i=1}^{m} u_i \nabla g_i(\mathbf{x}_0) = 0, \tag{2.9}$$

pri čemu je $u_i g_i(\mathbf{x}_0) = 0$ *i* $u_i \geq 0$ *za svako* $i = 1, \ldots, m$.



Slika 2.1: Geometrijska interpretacija uslova Khun-Tucker-a

Na slici 2.1 prikazana je geometrijska interpretacija uslova optimalnosti Khun-Tucker-a. Proizvoljan vektor predstavljen u obliku linearne kombinacije

$$\sum_{i \in I} u_i \nabla g_i(\mathbf{x}_0), \quad u_i \geq 0,$$

pripada konusu razapetom nad vektorima gradijenata funkcija $g_i(\mathbf{x})$ koja definišu ograničenja u tački $\mathbf{x}_0$. Iz jednakosti (2.9) sledi

$$-\nabla f(\mathbf{x}_0) = \sum_{i \in I} u_i \nabla g_i(\mathbf{x}_0), \tag{2.10}$$

pa vektor $-\nabla f(\mathbf{x}_0)$ pripada konusu razapetom nad gradijentima funkcija aktivnih ograničenja $g_i(\mathbf{x})$ u tački $\mathbf{x}_0$ akko zadovoljava uslove optimalnosti Khun-Tucker-a.

Brojevi $u_1, \dots, u_m \geq 0$ uobičajeno se i ovde nazivaju **Lagranžeovi činioci**, dok jednačine

$$u_i\, g_i(\mathbf{x}_0) = 0, \qquad i = 1, \dots, m, \tag{2.11}$$

nazivamo **uslovima dopunske elastičnosti**. Uslovi Khun-Tucker-a mogu se zapisati u vektorskom obliku:

$$\nabla f(\mathbf{x}_0) + \mathbf{u}^T \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}_0) = 0 \quad \wedge \quad \mathbf{u}^T \mathbf{g}(\mathbf{x}_0) = 0 \quad \wedge \quad \mathbf{u} \geq 0,$$

gde je $\nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}_0)$ matrica reda $n \times m$ u kojoj je i-ta kolona jednaka gradijentu $\nabla g_i(\mathbf{x}_0)$, a $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_m)^T$ je m-dimenzionalni vektor Lagrange-ovih činilaca. Medjutim, u praksi se koeficijenti vektora $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ najčešće izračunavaju iz jednakosti

$$u_i = \begin{cases} 0, & i \notin I \\ \alpha_i, & i \in I \end{cases},$$

gde su $\alpha_i > 0$ rešenja sistema linearnih jednačina (2.10). Očito, ovaj sistem jednačina je ekvivalentan sistemu (2.9), pa na osnovu linearne nezavisnosti vektora $\nabla g_i(\mathbf{x}_0),\ i \in I$ sledi da su njegova rešenja, tj. vrednosti $\alpha_i,\ i \in I$ jedinstveno odredjene.

Dalje navodimo dve teoreme koje opisuju ključne uslove za rešavanje zadatka NLP - a.

Teorema 2.2.2. (dovoljni uslovi Khun-Tucker-a) *Neka su funkcije f i $g_i,\ i \in I$ konveksne i diferencijabilne u tački $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$. Ako su u istoj tački ispunjeni uslovi Khun-Tucker-a, tj. postoje brojevi $u_i \geq 0,\ i \in I$ takvi da važi* (2.9)*, onda je $\mathbf{x}_0$ tačka globalnog minimuma postavljenog zadatka NLP-a.* □

Teorema 2.2.3. (***Arrow - Ethovenov***) *Ako su zadani nelinearni program*

$$\textit{maksimizirati} \qquad \xi = f(x)$$

$$\textit{uz uslov} \quad g_i(x) \leq r_i \qquad (i = 1, 2, \dots, m)$$

$$x \geq 0$$

i zadovoljeni su sledeći uslovi:

(a). *Funkcija cilja* $f(x)$ *je diferencijabilna i* ***kvazikonkavna*** *u nenegativnom ortantu.*

(b). *Svaka funkcija* $g_i(x)$ *u ograničenjima je diferencijabilna i* ***kvazikonveksna*** *u nenegativnom ortantu.*

(c). *Tačka* $\mathbf{x}$ *zadovoljava Kun - Takerove uslove za maksimum.*

(d). *Ispunnjen je jedan bilo koji od sledećih uslova:*

(d_1). $f_j(\mathbf{x}) < 0$ *barem za jednu promenljivu* x_j.

(d_2). $f_j(\mathbf{x}) > 0$ *za neku promenljivu* x_j *koja uzima pozitivne vrednosti bez narušavanja ograničenja.*

(d_3). *Od* n *izvoda funkcije* $f_j(\mathbf{x})$ *nisu svi jednaki nuli a funkcija* $f(\mathbf{x})$ *dva puta je diferencijabilna u okolini tačke* $\mathbf{x}$, *tj. svi parcijalni izvodi drugog reda postoje u tački* $\mathbf{x}$.

(d_4). *Finkcija* $f(\mathbf{x})$ *je konkavna i tada* $\mathbf{x}$ *daje maksimum od* $\xi = f(x)$. $\square$

2.2.3 Maksimiziranje prodaje

U klasičnoj mikro analizi poslovanja preduzeća uglavnom se postavlja cilj maksimiziranja profita. Medjutim, osim takvog cilja, menadžment, zavisno od modela organizacije preduzeća, cilj maksimiziranja prihoda postavlja u nekim slučajevima ispred same prodaje. Sobzirom da se ukupni prihod P_u uzima kao jedan od važnijih parametara koji opisuje konkurentnost preduzeća u okviru odredjene industriujske grane, a pored toga, povećanje prihoda od prodaje uzima se i kao kriterijum za ocenu uspeha u upravljanu preduzećem. Na taj način prihod kao parametar direktno utiče i na samo nagradjivanje, tj. zarade radnika pa i samog menadžmenta, sobzirom na rezultate poslovanja.

Dakle, maksimiziranje prodaje[10] je svakako alternativni cilj organizacije preduzeća, uz predpostavku da se menadžment preduzeća, kako bi izbegao eventualno nezadovoljstvo vlasnika akcija, neprekidno brine i vodi računa da nivo ukupne dobiti

[10] Petković N, Božinovic M.: *Maksimizing sales under conditions of nonlenarity*, Facta univerzitatis, No 4., Niš, (2015).

ne padne ispod zadatog minimuma, tj.

$$\min D_u(x) = \xi_0 \,. \tag{2.12}$$

U tom slučaju problem upravljanja preduzećem sastoji se u maksimiziranju funkcije ukupnog prihoda $P_u = P_u(x)$ uz ograničavajući uslov,

$$D_u = P_u(x) - T_u(x) \geq \xi_0, \tag{2.13}$$

gde je $D_u(x)$ ukupna dobit, $P_u(x)$ ukupan prihod, $T_u(x)$ ukupni troškovi preduzeća, a x obim proizvodnje ili tražnja. Ovaj uslov drugačije možemo pisati u obliku modela:

$$\text{maksimizirati} \qquad P_u = P_u(x)$$

$$\text{uz uslov} \quad T_u(x) - P_u(x) \leq -\xi_0, \quad (\xi_0 > 0)$$

$$x \geq 0.$$

Pitanje primene Kun - Takerovih uslova na ovaj model zavisi pre svega od toga da li je funkcija $P_u(x)$ diferencijabilna i konkavna, a funkcija $T_u(x)$ diferencijabilna i konveksna, i sve dok je taj uslov ispunjen, na osnovu čega možemo zaključiti da je funkcija ograničenja $T_u(x) - P_u(x)$ takodje diferencijabilna i konveksna, pa se Kun-Takerova teorema o dovoljnim uslo vima može primeniti .

Naravno, da veći stepen opštosti nije moguće očekivati ublažavanjem pretpostavki o konveksnosti, odnosno konkavnosti, na kvazikonveksnu funkciju $P_u(x)$ i kvazikonkavnu funkciju $T_u(x)$. U tom slučaju, uz te blaže pretpostavke, funkcija ograničenja $T_u(x) - P_u(x)$ pretstavlja zbir dve kvazikonveksne funkcije, pri čemu nije sigurno da je i ona sama kvazikonveksna. Ukoliko je taj slučaj tada se novom predpostavkom funkcija ograničenja $D_u(x)$ može transformisati u kvazikonveksnu, pa se u tom slučaju mogu primeniti dovoljni uslovi za ekstrem.

Kun - Takerovi uslovi sastoje se od graničnih uslova:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial x} &= P_u{}'(x) - \phi T_u{}'(x) + \phi P_u{}'(x) \leq 0 \\ \frac{\partial \theta}{\partial \phi} &= -\xi_0 - T_u(x) + P_u(x) \geq 0 \end{aligned} \tag{2.14}$$

$$x \geq 0 \,,$$

gde je θ poznata Lagranžeova funkcija u nelinearnom programiran ju, a ϕ uveden Lagranžeov multiplikator

$$\theta = P_u(x) + \phi(-\xi_0 - T_u(x) + P_u(x)),$$

pri čemu je $\phi \geq 0$.

U slučaju da je $P_u(0) = 0$ i $T_u(0) > 0$, tj. da je proizvodnja jednka nuli, $x = 0$, tada bi smo imali

$$\frac{\partial \theta}{\partial \phi} = -\xi_0 - T_u(0) < 0$$

što svakako narušava drugi granični uslov. Iz tog razloga umesto toga moramo uzeti $x > 0$, uslov koji je apsolutno u skladu sa činjenicom da nivo proizvodnje koji je jednak nuli leži izvan skupa mogućih rešenja $[x_1, x_2]$. Uslov $x > 0$ povlači, da je $\dfrac{\partial \theta}{\partial x} = 0$, što znači da prva slaba nejednačina u (2.14) mora biti zadovoljena kao jednačina. Rešenje te jednačine daje pravilo odredjivanja proizvodnje koja maksimizira prodaju uz ograničenje

$$P_u{}'(x) = \frac{\phi}{1+\phi} \cdot T_u{}'(x) \tag{2.15}$$

U izrazu (2.15) vrednost ϕ može biti nula ili veća od nule, tj. $\phi \geq 0$. Ako je $\phi = 0$ pravilo se svodi na $P_u'(x) = 0$, a preduzeće će težiti da postigne nivo proizvodnje za koju je granični prihod

$$P_g(x) = P'_u(x) = 0\,.$$

To bi bila idealna proizvodnja jer bi preduzeće u tom slučaju došlo do maksimalnog prihoda. Medjutim, ovako ekstremna situacija nije moguća uz naše pretpostavke jer vrednost tražnje x_i, uz koju bi prethodni uslovi bili mogući, leži izvan skupa mogućih rešenja, tj. $x_i \notin [x_1, x_2]$. U tom slučaju moramo uzeti da je $\phi > 0$, medjutim to onda povlači da je $\dfrac{\partial \theta}{\partial \phi} = 0$ odakle sledi da ograničenje na profit mora biti zadovoljeno kao jednakost, uz napore preduzeća da ostvari makar minimalnu dobit ξ_0. Ako je $\phi > 0$, dakle slučaj kada proizvodnja maksimizira prodaju, tj. situacija kada su granični prihodi manji od graničnih troškova, tj.

$$P_u{}'(x) < T_u{}'(x) \qquad \text{jer je} \qquad \frac{\phi}{1+\phi} < 1 \tag{2.16}$$

što bi u opštem slučaju dalo viši nivo proizvodnje nego pravilo maksimizacije dobiti, tj. $P_u'(x) = T_u'(x)$, dakle, kada su granični prihodi i granični troškovi jednaki.

U narednoj tabeli prikazani su rezultati istraživanja koje smo sproveli u kompaniji **Deleze**, tj. **Maxi** Diskont u Zaječaru, a anketom je praćena prodaja proizvoda praška za pranje marke **Ariel** u periodu od 30. dana, pri čemu je tražnja x u narednoj tabeli izražena u $kg \cdot 10^2$, a funkcije $P_u(x)$ i $T_u(x)$ u 10^2 dinara.

Skup diskretnih vrednosti funkcije $P_u(x)$ i $T_u(x)$ peikazane su u Tabeli:

x	$P_u(x)$	$T_u(x)$
1	89.00	5.5
3	261	207.00
5.50	464.75	205.75
6.80	565.76	386.72
8.40	685.40	445.68
11.00	869.00	623.00
12.50	967.75	743.75
14.70	1106.90	945.27
16.20	1193.56	1099.32
18.50	1322.75	1361.75
20.00	1400	1550.00

Na osnovu empirijskih podataka do kojih smo došli tokom istraživanja , a koji su prikazani u prethodnoj tabeli 1., **metodom aproksimacija**[11], vidi [13], dolazimo do traženih funkcija ukupnih prihoda

$$P_u(x) = -1,0005x^2 + 89,988x \tag{2.17}$$

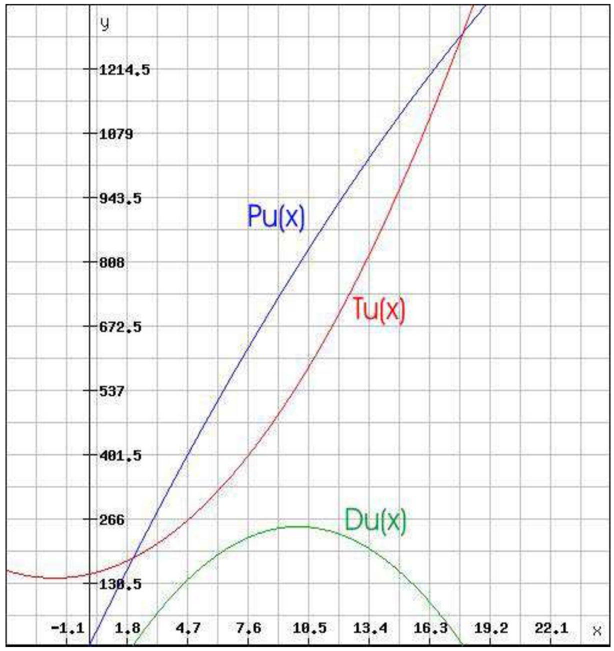
i ukupnih troškova

$$T_u(x) = 3x^2 + 10x + 150\,. \tag{2.18}$$

Grafici ovih funkcija prikazani su na slici br. 9.

Dalje, pošto smo dobili tražene funkcije ukupnih prihoda $P_u(x)$ i ukupnih troškova $T_u(x)$ možemo primeniti napred opisane uslove optimizacije Kun - Takera, na maksimiziranje prodaje, što za posledicu ima povećanje ukupnih prihoda.

[11]Metoda aproksimacija opisana je u knjizi M. Božinović: *Operaciona istraživanja*, sa originalnim softverskim rešenjem, **Metodi**, koji sadrže set softvrskih rešenja za razne matematičke modele medju kojima je i aplikacija za aproksimaciju funkcija na računaru, a koja je ovde korišćena.



Slika 2.2: Graf aproksiimativnih funkcija ukupnih prihoda, troškova i dobiti

Problem optimizacije koji se u ovm slučaju postavlje jeste maksimizirati funkciju P_u, tj. imamo

$$\begin{aligned} \text{maksimizirati} \qquad & P_u = P_u(x) \\ \text{uz uslov} \quad & T_u(x) - P_u(x) \leq -\xi_0, \quad (\xi_0 > 0) \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

kao i da ukupna dobit $D_u(x)$ ne može biti manja od $\xi_0 = 50 \cdot 10^2$, tj. jedan od ograničavajući uslova je i

$$\xi_0 \geq 50\,.$$

Primenom Kun Takerovih uslova polazimo od sledećih nejednačina:

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = P_u'(x) - \phi T_u'(x) + \phi P_u'(x) \leq 0 \tag{2.19}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \phi} = -\xi_0 - T_u(x) + P_u(x) \geq 0\,, \tag{2.20}$$

Dalje, nakon diferenciranja funkcija (2.17) i (2.18), kao i odgovarajućih zamena u (2.19) i (2.20), i sredjivanjem dobijenih nejednačina, u našem slučaju konačno dobijamo

$$\begin{aligned} \frac{\partial\theta}{\partial x} &= -2,001x + 89,988 - \phi\,(8,001x - 79,988) \leq 0 \qquad (2.21) \\ \frac{\partial\theta}{\partial\phi} &= -4,0005x^2 + 79,988x - 200 \geq 0 \qquad (2.22) \end{aligned}$$

Sada, ako u izrazu (2.22) stavimo da je $x = 0$ dobijamo $-200 \geq 0$ što predstavlja kontradikciju.

Dakle, uslov da $x > 0$ generiše sledeću relaciju

$$x > 0 \Longrightarrow \frac{\partial\theta}{\partial x} = 0 \qquad (2.23)$$

odakle dobijamo jednačinu

$$-2,001x + 89,988 - \phi\,(8,001 - 79,988) = 0. \qquad (2.24)$$

Dalje, iz uslova $\phi = 0$ imamo sledeću jednačinu

$$-2,001x + 89,988 = 0 \qquad (2.25)$$

odakle dobijamo vrednost za x tj.

$$x = 44,9715\,.$$

Ako sada vrednost za x zamenimo u (2.22) dobijamo da je

$$\frac{\partial\theta}{\partial\phi} = -4693,57 < 0$$

što je u kontradikciji sa uslovom da je $\dfrac{\partial\theta}{\partial\phi} \geq 0\,$. Dakle, ako sada postavimo uslov $\phi > 0$ dobijamo jednačinu

$$\frac{\partial\theta}{\partial\phi} = 0 \Longleftrightarrow -4,0005x^2 + 79,988x - 200 = 0 \qquad (2.26)$$

Rešavajući kvadratnu jednačinu (2.26) dobijamo sledeće korene:

$$x_1 = 2,9296 \qquad x_2 = 17,0649 \qquad (2.27)$$

Proverimo sada da li dobijena rešenja, koreni x_1 i x_2, zadovoljavaju postavljeni uslov optimizacije. U tu svrhu koren x_1 zamenimo u jednačinu (2.23) odnosno (2.24) pa dobijamo vrednost za $\phi \simeq -1,488$, tj. $\phi < 0$, što je kontradikcija u odnosu na predhodno postavljeni uslov da je $\phi > 0$. Dakle, možemo zaključiti da koren x_1 jdnačine (2.26) ne zadovoljava postavljeni uslov optimizacije. Ako to isto učinimo sa drugim korenom x_2 jednačine (2.26) dobijamo da je $\phi > 0$ što je u saglasnosti sa postavljenim uslovom optimizacije tražnje.

Sa druge strane, imamo da je funkcija ukupne dobiti $D_u(x)$ data sa

$$\begin{aligned} D_u(x) &= P_u(x) - T_u(x) \\ &= -4,0005x^2 + 79,988x - 150 \end{aligned} \tag{2.28}$$

Ako sada diferenciramo funkciju (2.28) i taj izvod izjednačimo sa nulom dobijamo

$$D'_u = -8,0001x + 79,988 = 0 \tag{2.29}$$

odakle rešavanjem jednačine (2.29) po x nalazimo vrednost za x tj.

$$x = 9,9984. \tag{2.30}$$

Dobijeno reěnje (2.30) predstavlja tražnju ili obim prodaje za koju se maksimizira ukupna dobit D_u u odnosu na posmatrani proizvod. Dalje, uporedjući koren x_2 jednačine (2.26) sa vrednošću za x, tj. $x_2 > x$ zaključujemo da je vrednost $x_2 = 17,0649$ ona vrednost kojom se maksimizira ukupni prihod $P_u(x)$, pod uslovom da je minimalna vrednost dobiti

$$\min D_u = \xi_0 = 50 \cdot 10^2. \tag{2.31}$$

Napomena. Iz navedenog primera možemo zaključiti da je osnovna ideja pri numeričkom rešavanju zadataka NLP-a sa dve promenljive da se prvo pokuša sa vrednošću nula za svaku promenljivu odlučivanja, čime se znatno pojednostavljuju granični uslovi, sobzirom da neki članovi u tom slučaju izčezavaju pa je matematički model znatno pojednostavljen. Ako u tom slučaju možemo naći odgovarajuće nenegativne vrednosti Lagranžeovih multiplikatora koji zadovoljavaju sve granične nejednačine, tada će rešenje jednako nuli biti optimalno. Medjutim, ako u tom slučaju budu narušene neke od nejednačina, u tom slučaju možemo uzeti da jedna ili više promenljivih budu pozitivne. Za svaku pozitivnu vrednost promenljive odlučivanja možemo, oslabljivajem uslova, prevesti granični uslov koji je dat u obliku nejednačine, u oblik jednačine. Rešenja takve jednačine će nas dovesti ili do rešenja ili do kontradikcije zbog čega bi smo morali tragati za nekom novom idejom i pokušamo nešto sasvim iznova.

Takodje treba napomenuti da ukoliko se u matematičkom modelu nelinearnog modela pojavljuju funkcije sa više od dve promenljive, utoliko se sve više komplikuje rešavanje samog optimizacionog zadatka, pa u takvim slučajevima nužno je preći na pisanje odgovarjućeg softvera i preći na primenu računara u rašavanju postavljenog zadatka, što moramo priznati, u većini sličajeva naročito složenijim, nije jednostavno i kao takvo zahteva pre svega timski rad.

Glava 3

Dinamičko programiranje

Dinamičko programiranje, [1][2][3] kao specijalan slučaj nelinearnog programiranja, je poseban matematički aparat, koji omogućuje optimalno planiranje tzv. **višeetapnih procesa upravljanja**. Tu spadaju procesi u kojima se donosi niz odluka i one se donose postepeno u vremenu. Mnogi zadaci upravljanja procesima u tehnici, ekonomiji, vojsci, fizici, biologiji, itd mogu se pretstaviti u vidu višeetapnih procesa, na koje se može primeniti metoda dinamičkih programiranja. Osnovni cilj jeste dobijanje **optimalnog plana upravljanja**, pri čemu se pod optimalnim upravljanjem podrazumeva ono upravljanje, koje daje najbolje rešenje, odnosno rešenje kojim se postiže maksimalni cilj operacije. Za praktičnu primenu metode dinamičkog programiranja (pisaćemo, kraće, DP metod) potrebno je da svaki razmatrani proces ima svoj jasno postavljen matematički model, sa precizno definisanom **funkcijom cilja**, koji treba maksimizirati ili minimizirati, kao i **ograničenjima** koja se moraju uzeti u obzir u toku procesa. Za ovako postavljen zadatak, ukoliko su zadovoljeni uslovi koje zahteva primena DP metode, treba naći funkcionalne relacije primenom principa optimalnosti. U izvesnim slučajevima moguće je naći analitičko rešenje, ali najčešće rešenje se nalazi numeričkom analizom, uz primenu razvijenih programa. Odredjivanje optimalne strategije zasniva se na principu optimalnosti koji se, prema osnivaču ove discipline, naziva **Belmanov princip optimalnosti.** U slobodnoj in-

[1] Belman R.: *Dynamic Progeaming*,Princeton University Pres, Princeton, 1957.

[2] Božinović M.:*Operaciona istraživanja*, Ekonomski fakultet K. Mitrovica, 2012.

[3] Bertsekas D. P. : *Nonlinear Programming*, Athena Scientific.(2004).

terpretaciji, možemo ga formulisati kao osobinu da optimalna strategija, bez obzira na početno stanje i prethodno rešenje, u svakoj narednoj etapi treba da odredi optimalnu strategiju u odnosu na prethodno dobijeno stanje, kao rezultat prethodnog rešenja. Princip optimalnosti se može izraziti matematički, pomoću **funkcionalnih jednačina** ili **rekurzivnih relacija** pomoću kojih se izražavaju veze izmedju funkcija cilja posmatrane etape i funkcije susedne etape. U narednom izlaganju opisaćemo detaljnije sve gore navedene pojmove, sa posebnim osvrtom na primenu metoda DP-a u optimizaciji nekih konkretnih problema u matematici, ekonomiji i slično.

3.1 Osnovni pojmovi dinamičkog programiranja

Pod terminom **sistem** podrazumeva se fizički (tehnički, ekonomski,...) sistem koji se može definisati kao vektor stanja

$$\mathbf{r}(t) = \Big[r_1(t) \;\; r_2(t) \;\; \cdots \;\; r_N(t) \Big].$$

Komponente vektora $\mathbf{r}(t)$ odredjuju osobine sistema, a broj N naziva se **dimenzijom sistema**. Ako p_0 označava početno, a $p_1, p_2, \ldots p_n, \ldots$ stanja sistema u uzastopnim vremenskim trenucima, onda postoji relacija

$$p_{n+1} = W(p_n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

koja predstavlja skup vektora $(p_o, p_1, p_2, \ldots,)$ kao reprezentaciju ponašanja sistema u diskretnim trenucima vremena $n = 0, 1, 2, \ldots$. Tada se može reći da takav skup vektora definiše jednu specijalnu vrstu procesa koja se naziva **višeetapni proces**. Jasno je da je ovakva vrsta procesa definisana početnim stanjem sistema $p = p_0$ i trasformacijom $W(p)$, što se simbolično može predstaviti sa

$$[p, W(p)].$$

Proces se najjednostavnije može opisati kao ponašanje sistema u toku vremena. U opštem obliku, skalarne funkcije $G(p_o, p_1, p_2, \ldots, p_n)$ koje zavise od procesa mogu se, kod višeetapnih procesa, iskazati kao funkcije sledećeg tipa

$$\sum_{i=0}^{n} G(p_i).$$

S tim u vezi nas će pre svega interesovati razni procesi upravljanja, odnosno procesi koji protiču u vremenu i na čiji tok možemo uticati planiranjem i realizacijom odgovarajućih aktivnosti. Naravno, u vezi sa ovom problematikom, prirodno se nameće pitanje **merljivosti**, tj. kako odrediti koji od dva i više modela upravljanja procesom najbolje zadovoljava neke unapred postavljene kriterijume.

Da bi odgovorili na ovo pitanje, potrebno je izvršiti matematičku karakterizaciju ovog zadatka, tj. izabrati neki numerički kriterijum F kojim mo žemo dovoljno dobro opisati stanje u procesu, pa na taj način izmeriti i samu efika- snost njegovim upravljanjem. Sasvim je jasno da će kriterijum F pri izboru raznih modela upravljanja imati i različite numeričke vrednosti na osnovu kojih možemo planirati neke akcije u budućnosti tako da F dostigne optimalnu vrednost, tj. maksimum ili minimum, u zavisnosti od toga kako je postavljen sam zadatak. Kada je reč o upravljanju procesima treba reći da pored metode **dinamičkog programiranja**, postoje i druge matematičke metode medju kojima je metoda dinamičkog programiranja svakako najvažnija.

Kako se primenjuje metoda DP-a u upravljanju procesom? Osnovna ideja u primeni ove metode sastoji se u tome da se izabrana strategija upravljanja razbije na više **faza**, pa na taj način sam proces postaje **višestepeni proces**, tj. možemo reći sastoji se od n faza.

Označimo sa U neko upravljanje datim procesom. Ako se radi o više etepenom procesu sa n faza, onda se u svakoj fazi primenjuje neko upravljanje U_i $(i = 1, \dots, n)$. Upravljanje čitavim procesom, u tom slučaju, predstavlja niz upravljanja po fazama, tj.

$$U = (U_1, U_2, \dots, U_n)$$

koji ćemo dalje zvati **strategija**. Sada, svakoj izabranoj strategiji odgovara odredjena vrednost kriterijuma F, tj.

$$F(U) = F(U_1, \dots, U_n).$$

Osnovni cilj u optimalnom upravljanju jeste izabratii takvu strategiju U^* za koju kriterijum F postiže svoju optimalnu vrednost, tj.

$$F(U^*) = (opt)F.$$

Ako sa f_i označimo efekat koji se postiže u i-toj fazi upravljanja U_i, tada je ukupan efekat f_u optimizacije kriterijuma F jednak

$$f_u = f_1 + f_2 + \cdots + f_n.$$

Postupak odredjivanja optimalne vrednosti kriterijuma F realizuje se tako da upravljanje u svakoj fazi obezbedjuje optimalno nastavljanje procesa. Drugim rečima, u i-toj fazi izbor upravljanja se vrši s obzirom na preostale, mogućnosti izbora u preostalim fazama $j = i+1, \dots, n$. Onda se upravljanja U_k biraju tako da se postigne optimalno upravljanje procesom ne samo u toj fazi već na svim fazama $j = i, i+1, \dots, n$ zajedno.

Praktična primena modela DP se može pokazati na primerima jednodimenzionalne ili višedimenzionalne optimalne raspodele resursa, pri čemu resurs može biti materijal, radna snaga, mašine ili investicije. Problem se sastoji u raspodeli jednorodnog resursa na n mesta trošenja, pri čemu ta mesta mogu biti različiti proizvodni procesi prerade (utroška) razmatranog resursa, ili različite linije, odnosno mašine, pri čemu je količina resursa ograničena. Svako mesto trošenja (mašina, linija i slično) ima različitu efikasnost, koja može da se ogleda kroz dobit koja se ostvaruje utroškom (preradom, tretmanom) odredjene količine resursa na odredjenom mestu (mašini, liniji, pogonu). Kapacitet svakog mesta trošenja je takodje ograničen. Ako funkcija cilja predstavlja dobit, onda se ona može napisati kao

$$F = f_1(x_1) + \cdots + f_n(x_n), \tag{3.1}$$

gde je

x_j - količina resursa dodeljena j-tom procesu (mašini, liniji),

$f_j(x_j)$ - funkcija dobiti koja se ostvari kada se količina x_j dodeli j-tom procesu (mašini, liniji).

Pošto je količina resursa ograničena, sledi da je

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leq S$$

gde je S ukupna količina raspoloživih resursa. U slučaju da su kapaciteti procesa ograničeni, mogu da postoje i sledeća ograničenja

$$a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n \leq b_n,$$

gde je a_j vrednost jedne jedinice resursa dodeljene j-tom procesu, a b_j ukupan kapacitet j-tog procesa.

3.2 Bellmanov princip optimalnosti

Osnovna ideja u primeni metoda DP-a, kako smo već prethodno istakli, sastoji se u tome da se upravljanje nekim procesom podeli u više faza, a zatim u svakoj od njih izabere optimalno upravljanje koje treba da omogući optimalno funkcionisanje procesa. Pritom, optimalno upravljanje ima osobinu da, bez obzira na prethodno stanje i upravljanje u ranijim etapama, naredne odluke moraju da daju optimalno upravljanje u odnosu na trenutno stanje sistema. Reč je o tzv. **principu optimalnosti** koji predstavlja srž metoda dinamičkog programiranja, a postavio ga je Ričard Bellman 1957. godine, u svojoj knjizi *Dynamic Programming*, Princeton University Press, Princeton.[4]

Mate matički model Bellman-ovog principa optimalnosti za slučaj **aditivne funkcije kriterijuma**. ima sledeću strukturu.

Neka su date funkcije $f_1(x_1)$, $f_2(x_2), \ldots, f_n(x_n)$. Pretpostavimo da treba naći vrednosti $x_1, x_2, \ldots, x_n$ za koje funkcija

$$F(x_1, \ldots, x_n) = f_1(x_1) + \cdots + f_n(x_n) \tag{3.2}$$

postiže maksimalnu vrednost uz ograničenja

$$a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n \leq b_n$$

[4]Belman R.: *Dynamic Progeaming*, Princeton University Pres, Princeton, 1957.

gde je $a_j \geq 0, \quad x_j \geq 0 \;$ i $b_n \geq 0$. Za proizvoljno $k = 1, \ldots, n$ uvodimo niz funkcija $\{F_k(b_k)\}$ na sledeći način

$$F_1(b_1) = \max_{a_1 x_1 \leq b_1} \{f_1(x_1)\} = \max_{x_1 \leq b_1/a_1} \{f_1(x_1)\}, \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned}
F_2(b_2) &= \max_{a_1 x_1 + a_2 x_2 \leq b_2} \{f_1(x_1) + f_2(x_2)\} \\
&= \max_{a_2 x_2 \leq b_2} \left\{ \max_{a_1 x_1 \leq b_2 - a_2 x_2} [f_1(x_1) + f_2(x_2)] \right\} \\
&= \max_{a_2 x_2 \leq b_2} \left\{ f_2(x_2) + \max_{a_1 x_1 \leq b_2 - a_2 x_2} [f_1(x_1)] \right\} \\
&= \max_{a_2 x_2 \leq b_2} \{f_2(x_2) + F_1(b_2 - a_2 x_2)\}.
\end{aligned}$$

U opštem slučaju, dobijamo

$$F_k(b_k) = \max_{x_k \leq b_k/a_k} \{f_k(x_k) + F_{k-1}(b_k - a_k x_k)\}, \qquad k = 2 \ldots n \tag{3.4}$$

pri čemu je $F_0(b_0) = 0$.

Jednačine (3.3) i (3.4) predstavljaju poznate **Bellman-ove jednačine**.

Na osnovu ovih jednačina polazni zadatak sa n promenljivih razlaže se na n jednostavnijih problema sa po jednom promenljivom, pa se, na taj način, rešavanje može realizovati po fazama. Funkcija F_1 se odredjuje neposredno, dok se funkcije $F_2, \ldots, F_n$ odredjuju pomoću rekurentne formule (3.4), pri čemu $F_n(b_n)$ predstavlja traženu optimalnu vrednost.

3.3 Optimizacija poslovnog procesa u FMT Zaječar

Fabrika mernih transformatora u Zaječaru, otuda i skraćenica FMT, postoji od 1969. godine i bavi se proizvodnjom elektro opreme. U svom asortimanu proizvoda izmedju ostalih proizvodi i transformatore niskog i srednjeg napona. Osim toga u svojoj ponudi tržištu isporučuje razne vrste potpornih i provodnih izolatora srednjeg napona kao i optpornike za uzemljenje i čitavu paletu drugih proizvoda. Pojedini proizvodi se isporučuju u malim serijama u intervalu od 50 - 100 komada, serija veća od 100 komada smatra se velikom serijom i komadna prodaje je u slučaju kada je broj proizvoda manji od 50. Cene nekih proizvoda su različite pa je na taj način i sam profit zavisi od formirane proizvodne cene za dati proizvod.

Osnovni problem menadžmenta fabrike sastoji se u načinu raspodele obrtnih sredstava u proizvodnju pojedinih artikala kako bi se ostvario maksimalni profit.[5] [6]

Na zahtev menadžmenta fabrike sproveli smo jedno istraživanje za tri proizvoda po njihovom izboru. To su prozvodi koji se isporučiju u velikim serijama pa je to i bio motiv menadžmenta da se na egzaktan način pronadje optimalna raspodela obrtnih sredstava koja se ulažu u njihovu proizvodnju. Dakle, radi se o sledećim proizvodima: Trafo niskog napona STEM - 081 do 0,72 KV, koga ćemo označiti kraće sa T_1, zatim Trafo srednjeg napona STEM - N 3821, do 35 KV, koga ćemo označiti sa T_2 i Transformator JNT SM 24/12 od 24 KV, koga ćemo označiti sa T_3.

Prema podacima koje smo dobili iz računovodstva fabrike za izabrane proizvode procenat zarade u maloj i velikoj seriji kao i komdnoj prodaji dati su u sledećoj tabeli:

Serije	T_1	T_2	T_3
Mala	48,16	37, 14	30,42
Velika	40,00	29, 52	23, 18
Komadno	64, 62	52, 37	44, 91

Tabela 1.

U narednoj tabeli 2. prezentirani su podaci koji predstavljaju očekivani profit u slučaju investiranja navedenih suma u proizvode T_1,T_2 i T_3.

[5]Petković N, Božinović M.: *The aplicaton of the dynamic programming method in investment optimization*, Megatrend revija, 2016. (u štampi).

[6]Stojanović V.:*Matematičko programiranje*, Prirodno - matematički fakultet Kosovska Mitrovica, (2012).

Ulaganja	T_1	T_2	T_3
20 000	9 632	7 428	6 084
40 000	16 000	11 800	9 272
60 000	38 772	31 422	26 946
80 000	41 600	43 536	39 040

Tabela 2.

Menadžment raspolaže sumom u iznosu od 80 000,00. Eura koju treba investiratu u proizvodnju transformatora T_1, T_2 i T_3 tako da profit bude maksimalan.

Za rešavanje ovakvog investicionog problema koristićemo napred opisani mate matički model Belmanovog principa optimalnosti.

Odgovarajući matematički model u ovom slučaju konstruišemo na sledeći način:

Sa $f_i(x_i)$ označavamo očekivani profit ulaganja sume x_i u i - ti proizvod gde je $i = 1, 2, 3$. Funkcija cilja F predstavlja ukupan profit ostvaren ulaganjem sume od 80 000. eura u proizvode T_1, T_2 i T_3. Na osnovu uvedenih uslova u postavljenom problemu finkcija cilja F ima sledeći oblik:

$$(\max)F = f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_3(x_3) \tag{3.5}$$

uz ograničenje da je $x_1+x_2+x_3 = 80000$ i $x_1, x_2, x_3 > 0$. Pisano u skraćenom obliku konstruisani model ima oblik:

$$\begin{gathered} F = \sum_{i=1}^{3} f_i(x_i) \\ \sum_{i=1}^{3} x_i = 80000 \\ x_i \geq 0, \ \text{ za, } i = 1, 2, 3. \end{gathered} \tag{3.6}$$

Dalje, prelazimo na primenu Belmanovog principa optimalnosti čiji algoritam je napred opisan i realizuje se po fazama, pri čemu rezultat u svakoj fazi zavisi rezultata u prethodnoj.

U prvoj fazi odredjujemo vrednost funkcije $F_1(b_1)$, tj. imamo

$$F_1(b_1) = \max f_1(x_1) \tag{3.7}$$

gde b_1 uzima vrednosti iz skupa

$$S = \{0, 20000, 40000, 60000, 80000\}.$$

Daljim izračunavanjem navedenih vrednosti funkcija dobijamo:

$$\begin{aligned} F_1(0) &= 0 \\ F_1(20000) &= 9632 \\ F_1(40000) &= 16000 \\ F_1(60000) &= 38772 \\ F_1(80000) &= 41600 \end{aligned} \tag{3.8}$$

U narednoj fazi odredjujemo optimalnu raspodelu ulaganja u proizvode T_1 i T_2, pa funkcija cilja $F_2(b_2)$ ima sledeći oblik:

$$F_2(b_2) = \max_{x_2 \le b_2} \{f_2(b_2) + F_1(b_2 - x_2)\}, \tag{3.9}$$

gde $b_2 \in S$. Sada računamo odgovarajuće vrednosti funkcije F_2 prema formuli (3.9) pa dobijamo sledeće vrednosti:

Za $b_2 = 0$ imamo

$$F_2(0) = \max_{x_2 \le 0} \{f_2(0) + f_1(0 - x_2)\} = 0, \text{ gde je } x_2 = 0 \tag{3.10}$$

Dalje za $b_2 = 20\ 000.$ imamo:

$$\begin{aligned} F_2(20000) &= \max_{x_2 \le 20000} \{f_2(x_2) + F_1(20000 - x_2)\} \\ &= \max \left\{ \begin{array}{c} f_2(0) + F_1(20000) \\ f_2(20000) + F_1(0) \end{array} \right\} \\ &= \max \left\{ \begin{array}{c} 0 + 9632 \\ 7428 + 0 \end{array} \right\} = 9632. \qquad (x_2 = 0); \end{aligned}$$

Za $b_2 = 40000.$ imamo

$$\begin{aligned}
F_2(40000) &= \max_{x_2 \leq 40000} \{f_2(x_2) + F_1(40000 - x_2)\} \\
&= \max \begin{Bmatrix} f_2(0) + F_1(40000) \\ f_2(20000) + F_1(20000) \\ f_2(40000) + f_1(0) \end{Bmatrix} \\
&= \max \begin{Bmatrix} 0 + 16000 \\ 7428 + 9632 \\ 11808 + 0 \end{Bmatrix} \\
&= \max \begin{Bmatrix} 16000 \\ 17060 \\ 11808 \end{Bmatrix} = 17060.
\end{aligned}$$

gde je $x_1 = x_2 = 20000.$

Sada za $b_2 = 60000.$ dobijamo sledeće vrednosti

$$\begin{aligned}
F_2(60000) &= \max_{x_2 \leq 60000} \{f_2(x_2) + F_1(60000 - x_2)\} \\
&= \max \begin{Bmatrix} f_2(0) + F_1(60000) \\ f_2(20000) + F_1(40000) \\ f_2(40000) + f_1(20000) \\ f_2(60000) + F_1(0) \end{Bmatrix} \\
&= \max \begin{Bmatrix} 0 + 38772 \\ 7428 + 16000 \\ 11808 + 9632 \\ 31422 + 0 \end{Bmatrix} \\
&= \max \begin{Bmatrix} 38772 \\ 23428 \\ 21440 \\ 31422 \end{Bmatrix} = 38772 \qquad (x_2 = 0)
\end{aligned}$$

Za $b_2 = 80000.$ dobijamo

$$
\begin{aligned}
F_2(80000) &= \max_{x_2 \le 80000} \{f_2(x_2) + F_1(80000 - x_2)\} \\
&= \max \begin{Bmatrix} f_2(0) + F_1(80000) \\ f_2(20000) + F_1(60000) \\ f_2(40000) + f_1(40000) \\ f_2(60000) + F_1(20000) \\ f_2(80000) + F_1(0) \end{Bmatrix} \\
&= \max \begin{Bmatrix} 0 + 41600 \\ 7428 + 38772 \\ 11808 + 16000 \\ 31422 + 9632 \\ 43536 + 0 \end{Bmatrix} \\
&= \max \begin{Bmatrix} 41600 \\ 46200 \\ 27808 \\ 41054 \\ 43536 \end{Bmatrix} = 46200 \qquad (x_2 = 0)
\end{aligned}
$$

gde je $x_1 = 60000$. a $x_2 = 20000$.

Na osnovu dobijenih vrednosti za x_1 i x_2 možemo zaključiti da je u ovoj fazi ulaganja potrebno uložiti u proizvodnju transformatora T_1, $x_1 = 60000$ eura, a u proizvodnju transformatora T_2 teba uložiti $x_2 = 20000$ eura.

Na kraju, u trećoj fazi, raspodeljujemo sredstva na sva tri proizvoda T_1, T_2 i T_3 pa u tom slučaju funkcija cilja $F_3(b_3)$ prima sledeći oblik:

$$F_3(b_3) = \max_{x_3 \le b_3} \{f_3(x_3) + F_2(b_3 - x_3)\}, \tag{3.11}$$

gde $b_3 \in S$

Za $b_3 = 0$ dobijamo vrednost funkcije $F_3(0) = 0$ i $(x_3 = 0)$, dok za $b_3 = 20000$. dobijamo sledeće vrednosti:

$$\begin{aligned} F_3(20000) &= \max_{x_3 \leq 20000} \{f_3(x_3) + F_2(20000 - x_3)\} \\ &= \max \left\{ \begin{array}{l} f_3(0) + F_2(20000) \\ f_3(20000) + F_2(0) \end{array} \right\} \\ &= \max \left\{ \begin{array}{l} 0 + 9632 \\ 6084 + 0 \end{array} \right\} = 9632 \quad \text{gde je} \quad x_3 = 0. \end{aligned}$$

Dalje, za vrednost parametra $b_3 = 40000.$ dobijamo sledeće vrednosti funkcije F_3:

$$\begin{aligned} F_3(40000) &= \max_{x_3 \leq 40000} \{f_3(x_3) + F_2(40000 - x_3)\} \\ &= \max \left\{ \begin{array}{l} f_3(0) + F_2(40000) \\ f_3(20000) + F_2(20000) \\ f_3(40000) + f_2(0) \end{array} \right\} \\ &= \max \left\{ \begin{array}{l} 0 + 17060 \\ 6084 + 9632 \\ 9272 + 0 \end{array} \right\} \\ &= \max \left\{ \begin{array}{l} 17060 \\ 15716 \\ 9272 \end{array} \right\} = 17060. \qquad \text{gde je} \qquad x_3 = 0. \end{aligned}$$

Za vrednost parametra $b_3 = 60000.$ dobijamo sledeće vrednosti funkcije cilja F_3 glasi:

$$\begin{aligned} F_3(60000) &= \max_{x_3 \leq 60000} \{f_3(x_3) + F_2(60000 - x_3)\} \\ &= \max \left\{ \begin{array}{l} f_3(0) + F_2(60000) \\ f_3(20000) + F_2(40000) \\ f_3(40000) + f_2(20000 \\ f_3(60000) + F_2(0) \end{array} \right\} \\ &= \max \left\{ \begin{array}{l} 0 + 38772 \\ 6084 + 17060 \\ 9272 + 9632 \\ 26946 + 0 \end{array} \right\} \end{aligned}$$

$$= \max \left\{ \begin{array}{l} 38772 \\ 23144 \\ 18904 \\ 26946 \end{array} \right\} = 38772. \qquad \text{gde je} \qquad x_3 = 0.$$

Na kraju, za vrednosti parametra $b_3 = 80000.$ vrednost funkcije F_3 iznisi:

$$\begin{aligned} F_3(80000) &= \max_{x_3 \leq 80000} \{f_3(x_3) + F_2(80000 - x_3)\} \\ &= \max \left\{ \begin{array}{l} f_3(0) + F_2(80000) \\ f_3(20000) + F_2(60000) \\ f_3(40000) + f_2(40000 \\ f_3(80000) + F_2(0) \end{array} \right\} \\ &= \max \left\{ \begin{array}{l} 0 + 46200 \\ 6084 + 38772 \\ 9272 + 17060 \\ 26946 + 9632 \\ 39040 + 0 \end{array} \right\} \\ &= \max \left\{ \begin{array}{l} 46200 \\ 44856 \\ 26332 \\ 36578 \\ 39040 \end{array} \right\} = 46\,200, \end{aligned}$$

pa konačno dobijamo vrednosti za $x_3 = 0, x_2 = 20\,000$ i $x_1 = 60\,000$.

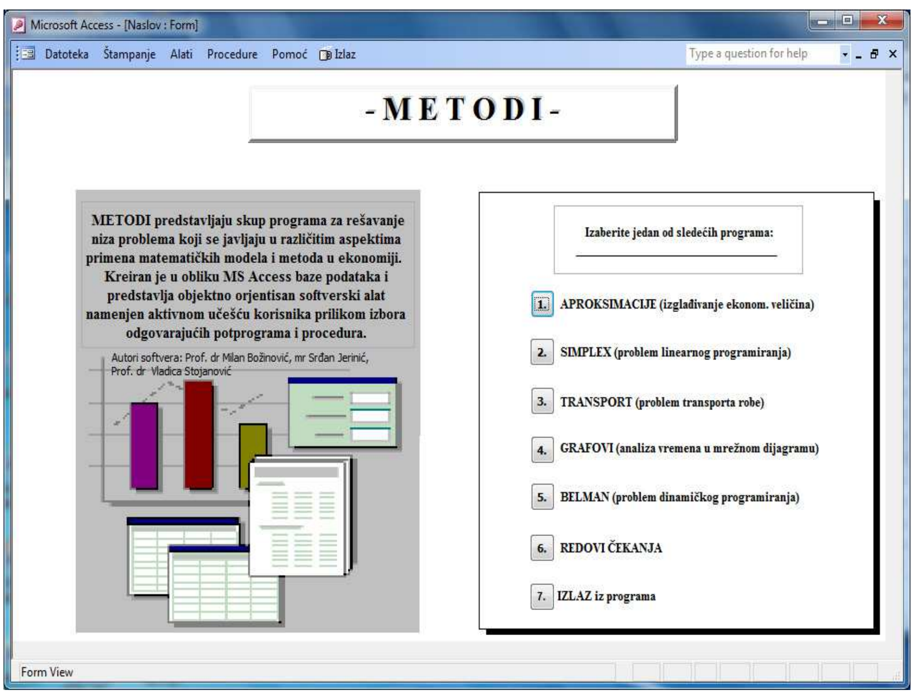
Rezultate predhodne dinamičke analize koja je sprovedena u kompaniji FMT Zaječar koji su napred izloženi mogu se sintetizovati u okvuru sledeće Tabele 3.:

Investicije	x_1	F_1	x_2	F_2	x_3	F_3
0	0	0	0	0	0	0
20 000	20 000	9 632	0	9 632	0	9 632
40 000	40 000	16 000	20 000	17 060	0	17 060
60 000	60 000	38 772	0	38 772	0	38 772
80 000	80 000	41 600	20 000	46 200	0	46 200

Tabela 3.

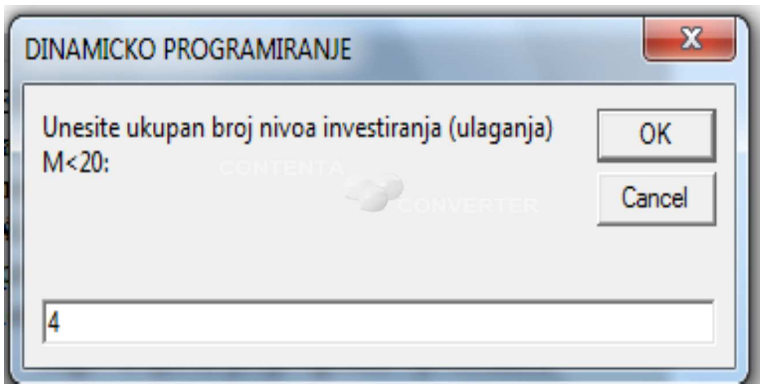
Do istih rezultata dinamičke analize doći ćemo primenom softverske aplikacije **Belman**, o čemu će biti reči u narednoj sekciji, čime ćemo praktično izvršiti proveru prethodnih procedura u Belmanovom principu optimalnosti koji je primenjen u rešavanju optimizacije investicionih ulaganja u kompaniji FMT Zaječar.

3.4 Softverska implementacija

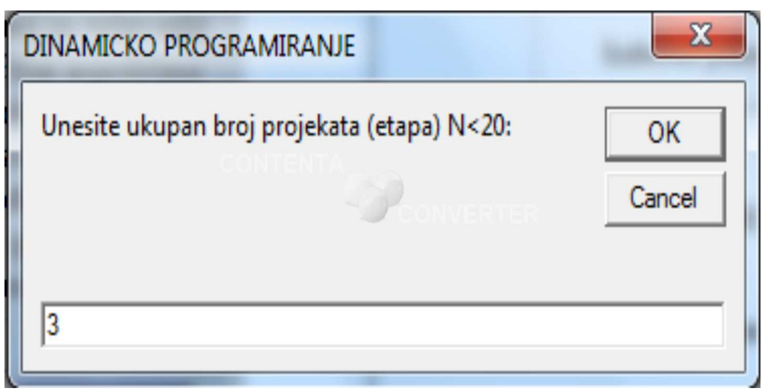


Slika 3.1:

Aplikacija **Metodi** ,[7] čiji početni prozor prikazan na slici 3.1., namenjena je rešavanju problema raznih matematičkih modela, medju kojima je i model dinamičkog programiranja. Kako je napred opisano, dinamičko programiranje predstavlja poseban matematički aparat koji omogućava optimalno upravljanje **više etapnim procesima**. Na taj način, podelom na faze u rešavanju zadatka NLP-a stvoreni su uslovi za pojednostavljenjem optimizacije globalnog zadatka, koji bi kao takav u opštem slučakju možda bio i ne rešiv.



Slika 3.2:



Slika 3.3:

Naša softerska aplikacija, čiji su osnovni elementi rada prikazani na slici 3.2., i 3.3. sa korisnikom komunicira u terminima investiconih ulaganja i, na taj način,

[7]Autori ove aplikacije su prof. dr Vladica stojanović, prof. dr Milan Božinović i mr. Srdjan jerinić, a kreirana je kao sastavni deo udžbenika [14] i [13], na Ekonomskom fakultetu u K Mitrovici

odredjuje optimalne strategije ovih ulaganja. Pritom, osnovni princip njenog rada jeste dobro poznati algoritam zasnovan na Bellman-ovom principu optimalnosti, koji smo detaljno opisali u predhodnoj sekciji. Dalje, u kratkim crtama, opisujemo osnovni postupak rada sa ovom softverskom aplikacijom.

Nakon unosa ukupnog broja nivoa ulaganja, odnosno broja projekata, korisnik aplikacije unosi vrednosti ulaganja, kao i očekivane vrednosti profita za svaki nivo investiranja i projekat, pojedinačno. Tada za zadate, unete vrednosti softver odredjuje optimalan plan investiranja za koji se ostvaruje maksimalan ukupni profit, sto je prokazano u tebeli 3.4.

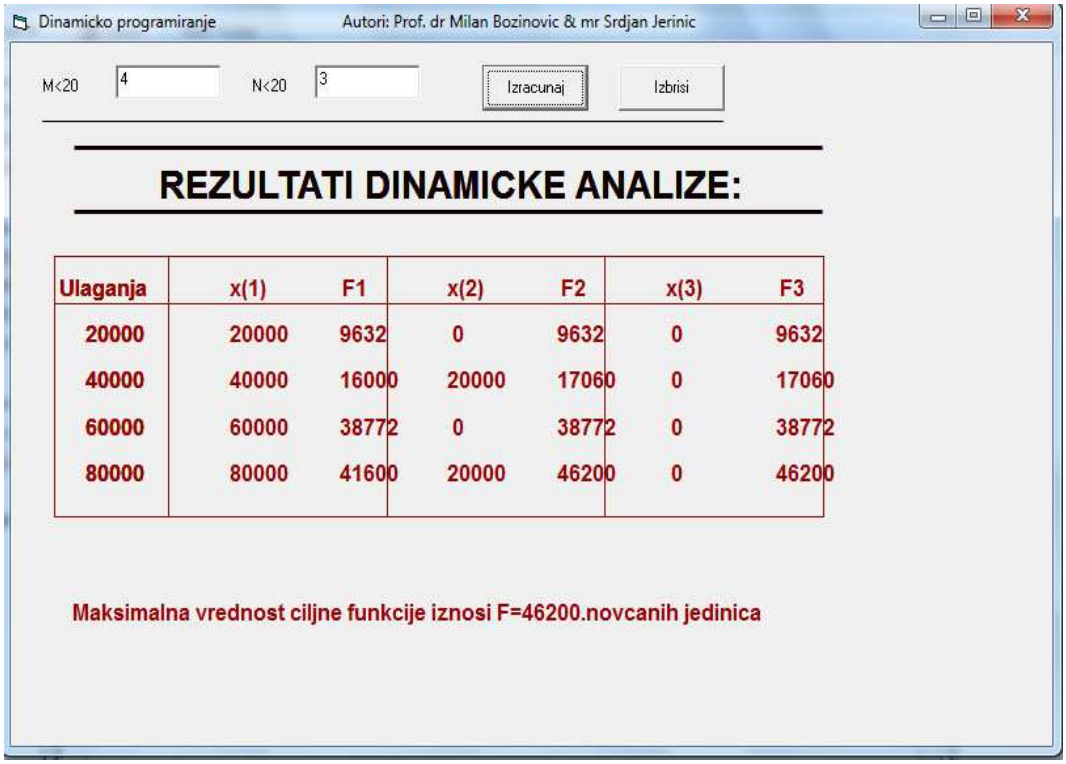
Svi izračunati parametri i osnovne karakteristike posmatranog problema DP-a daju se u obliku izveštaja MS - Access-a, kao što je prikazano na slici 3.3. i slici 3.4. prikazan je rad aplikacije **Belman** na primeru koji smo formulisali u toku istraživanja u fabricii transformatora u Zaječaru.

Nravno sama aplikacija je univerzalna i pomoću nje se može rešavati veliki broj sličnih problema. Na primer, u bankarstvu. Problem ovakvog tipa koji može da bude interesantan za banku jeste mogućnost izbora raznih projekata, tj biznis planova koje banka odluči da finansira, pri čemu je njihov broj sa jedne strane ograničen sredstvima kojim banka raspolaže, a sa druge, broj aplikanata za investicionim sredstvima premašuje limitirani iznos koji je banka izdvojila za te namene, na primer, za finansiranje poljoprivredne proizvodnje i slično.

3.4.1 Postoptimalna analiza

Na osnovu dobijenih numeričkih rezultata u rešavanju postavljenog problema optimizacije proizvodnje tri vrste transformatora FMT Zaječar, a koji su provereni primenom softvrske aplikacije **Belman** kaja je razvijena za potrebe rešavanja ekonomskih problema koji se mogu modelirati dinamičkim programiranjem, možemo izvesti sledeći zaključak:

Dakle, optimalna raspodela sume od 80 000,00 Eura glasi: 60 000,00 Eura treba investirati u proizvodnju transformatora T_1, 20 000,00 Eura u proizvodnju transformatora T_2, dok u proizvodnju trećeg transformatora T_3 investicija je neisplativa i ne



Slika 3.4:

treba je realizovati ni u kakvom obimu.[8]

Napomena: U velikom broju slučajeva ne postoji odgovarajući metod na osnovu kojeg se može naći optimalno rešenje formulisanog zadatka nelinearnog programiranja, što znači da postoji još uvek veliki broj nerešivih ili teško rešivih zadataka nelinearnog programiranja. Postoji više različitih metoda optimizacije pomoću kojih se mogu rešavati neki zadaci nelinearnog programiranja. Medjutim, većina njih je kreirana za različite tipove zadataka nelinearnog programiranja, koji se, pre svega, razlikuju prema samom mate matičkom modelu kao i prema funkciji cilja. Razliku medju nekim modelima takodje može da pravi i sistem ograničenja.

Stim u vezi u nekim problemima nelinearnog programiranja mogu se pojaviti, na primer, **linearna ograničenja i nelinearna funkcija cilja,** itd. Otuda i neki

[8]Sobzirom da **egze** fail aplikacije **Belman** nije programski rešen tako da automatski meri dužinu kućica u kojima smešta pojedine numeričke vrednosti, već je taj prostor unapred fiksiran dolazi do toga da više cifreni brojevi prelaze u drugu kolonu. Ovaj problem je rešen, ali na žalost posle izrade ovoga rda.

posebni nazivi za takve probleme nelinearnog programiranja, kao što su: **kvadratno programiranje**, **celobrojno programiranje**, itd.

Zadaci nelinearnog programiranja obuhvataju daleko šire područje upravljačkih zadataka u odnosu na zadatke linearnog tipa i samim tim su raznovrsniji od zadataka koji se svode na primenu linearnog programiranja. Medjutim, mnogi od njih još uvek nisu rešivi jer ne postoje razvijeni algoritmi čija bi primena dala odredjene rezultate.

Za rešavanje mnogih zadataka nelinearnog programiranja, kada su u pitanju složeniji problemi, neophodno je kreirati tim raznih stručnjaka kako bi zadatak bio rešen, a skoro uvek u takvim slučajevima pomoć odgovarajućeg softvera i računara su neizbežni. Jedna od takvih aplikacija, kako je napred rečeno, kreirana je za potrebe ovoga rda.

Glava 4

Markovljevi lanci i berzanski portfolio

U okviru ove glave razmatramo stanje na finansijskom tržištu Srbije, specijalno razmatraćemo Beogradsku berzu i nekoliko odabranih firmi čije akcije funkcionišu u okviru ove berze. Istraživanje koje smo u ovom slučaju sproveli imalo je za cilj da na primeru nekoliko reprezentativno odabranih firmi pokažemo ne samo funkcionisanje same berze već i metodologiju kojom se mogu prognozirati razni trendovi i situacije na berzi i kao takvi predočiti potencijalnim ulagačima o ukupnim kretanjima na Beogradskoj berzi. S obzirom da u domaćoj literaturi nismo naišli na neko slično istraživanje i primenu metodologije A.A. Markova u prognozi ponašanja pojedinih ekonomskih parametara na Beogradskoj berzi, odlučili smo da istraživanje i Teoriju Markova primenimo na ponašanje Beogradske berze.

4.1 Istorijski osvrt na Teoriju Markova i Beogradske berze

Globalno finansijsko tržište danas, s'obzirom na turbulentna kretanja velikog inteziteta: inflaacije svetskih valuta, pad cene nafte, pad cene plemenitih metala, veštački generisane finasijske krize kakvu smo imali pre nekoliko godina, koja je krenula sa Volt Strita, a koje izazivaju skoro tektonske poremećaje na finansijskim tržištima nacionalnih ekonomija, od investitora i svih koji na njima posluju, zahteva svakodnevno i egzaktno praćenje svih promena koje se dešavaju bilo na globalnom ili na tržištima nacionalnih ekonomija.

Stim u vezi, u okviru ove sekcije mi ćemo se baviti specijalno poslovanjem Beogradske berze i kompanijama čije su akcije interesantne za investitore i ako finansijsko tržište u Srbiji još uvek nije dovoljno razvijeno, sobzirom na nivo privrednog razvoja i ekonomije uopšte.

Početak rada Beogradske berze vezuje se za 21. Novembar 1894. godine, a prve transakcije su objavljene negde u Januaru 1895. godine. U toku rata berza nije radila da bi njen rad formalno prestao 1953. godine, nakon što je proglašena nepotrebnom institucijom. Godine 1989. započela je obnova rada Beogradske berze pod nazivom Jugoslovensko tržište kapitala, a od 1992. godine ponovo funkcioniše kao Beogradska berza i njen razvoj ima uzlazni karakter imajući u vidu ekonomsku situaciju u Srbiji, tranzicioni period koji već godinama traje što svakako ima značajan uticaj na njen razvoj i finansijsko tržište uopšte.

Kada je reč o modernoj opštoj Teoriji portfolija njene temelje postavio je američki ekonomista i dobitnik Nobelove nagrade Harry Markovic, 1952. godine u svom radu *"Portfolio selection"* koji je objavljen u časopisu *"The Jornal of Finance"*. Markovic je u ovom radu opisao uslove pod kojima je moguće ostvariti maksimalno očekivani prinos uz najmanji rizik. Metoda Markovica je jedna od najviše korišćenih metoda u analizi portfolija uopšte.

Pored metode Markovica u literaturi postoji još nekoliko metoda koje se mogu primeniti u analizi portfolija i prognozi njegovog ponašanja, na možda jednostavniji način s'obzirom na matematički aparat koji je upotrebljen za konstrukciju tih modela. Medju njima postoji metodološka razlika, ali ono što je zajedničko jeste da skoro sve one daju približno iste rezultate.

Jedna od njih, kojom ćemo se baviti u okviru ovoga rada, je svakako metoda koju je razvio ruski načnik Andrej Markov, [1] koji je postavio fundamentalne principe

[1] Andrej Markov, ruski naučnik - (1856.- 1992.)

ove teorije, koja predstavlja sintezu Teorije verovatnoća i Teorije matričnog računa, što je izdvaja od ostalih metoda pre svega po svojoj jednostavnosti jer omogućuje istraživanje onih procesa koji se ne mogu opisati nekim jednostavnim funkcijma sa jasno postavjenim uslovima.

Zanimljivo je da je Markov prvi put primenio svoju teoriju u radu [54] na poemu Aleksandra Puškina *Evgeny Onegin* gde je praćenjem 2000. glasova predvideo sa kojom će se verovatnoćom u narednom tekstu pojaviti samoglasnik iza samoglasnika, a sa kojim verovatnoćom samoglasnik iza suglasnika. U to vreme, početkom 20. veka, slede različite primene ove teorije u mnogim oblastima pa i u ekonomiji.

U oblasti finansija i prognozi prinosa, ovu metodu medju prvima su koristili McQueen i Thorley 1991. godine u radu [2], zatim Doublday i Esung u radu [3], 2001. godine, koji su posmatrali razvijeno američko tršište. Medjutim, slično njima razmatrana su i nerazvijena tržišta, na primer u Nigeriji, čime su se bavili Agwuegbo, Adewolei Maduegbuna u [4], 2014., zatim Svoboda i Lukas u [77], 2012. godine koji su istraživali prašku berzu, kao i T. Škrijanić i V. Kojić koji su radu [87] opisivali Zagrebačku berzu.

4.2 Osnovni elementi teorije Markova i slučajnih procesa

Slučajne funkcije vremena često se javljaju u raznim oblastima nauke i tehnike. Sistemi upravljanja i praćenja objekata, fluktacije cena odredjenih proizvoda, opsluživanje klijenata na šalterima itd. predstavljaju tipične primere takvih pojava. Promene stanja takvih sistema (npr. trenutni broj klijenata koji se opslužuju) nisu determinističkog, već slučajnog karaktera. Zato se, u takvim slučajevima, slučajni

[2]McQueen G., Threly S.: *Are Stock Returs Predictable? A Test Using Markov Chains*, The Jornal of Finance. 46 (1) : 239 - 363.

[3]Doubleday K., Esunge J.:*Aplication of Markov Chains to Stock Trends*, Jornal of Matematics and Statistics, 7 (2), pp. 103-106.

procesi uzimaju kao pogodni matematički modeli. [4][5][6] U ovom delu izložićemo osnovne činjenice koje su neophodne za pravilno razumevanje slučajnih procesa kao posebno značajne oblasti Teorije verovatnoća, sa mnogobrojnim i raznovrsnim primenama.

Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ prostor verovatnoća, a $T \subseteq \mathbb{R}$ skup indeksa (vreme). **Slučajni proces** je realna funkcija $X(t, \omega)$ definisana na skupu $T \times \Omega$ takva da, za svako (fiksirano) $t \in T$, veličina $X(t, \omega)$ jeste slučajna veličina na $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Često ćemo pisati $X_t(\omega)$ ili samo X_t, tj. slučajni proces shvatamo kao skup - familiju slučajnih veličina:

$$\{X_t \,|t \in T\}$$

definisanih na istom prostoru verovatnoća $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Skup T ima posebnu ulogu u definisanju slučajnog procesa. Obično se naziva **parametarski (indeksni) skup** ili **oblast definisanosti** slučajnog procesa. Iako u samoj matematičkoj teoriji nema posebnih razloga za interpretaciju parametara skupa T, sa praktičnog stanovišta on se obično tumači kao **vreme**. Dakle, svaka slučajna veličina X_t realizuje se u posebnom vremenskom trenutku $t \in T$. Na taj način, za svaki (fiksirani) elementarni ishod $\omega \in \Omega$ dobija se realna funkcija

$$X(\cdot, \omega) : T \longrightarrow R$$

koju nazivamo **realizacija (trajektorija)** slučajnog procesa. One, dakle, predstavljaju familiju realnih funkcija dobijenih konkretnim realizacijama elementarnih dogadjaja iz skupa Ω. Prilikom izučavanja slučajnih procesa od posebnog je značaja priroda parametarskog skupa T. Ukoliko je on prebrojiv (npr. $T \subseteq \mathbb{N}$ ili $T \subseteq \mathbb{Z}$) za slučajni proces X_t reći ćemo da je **vremenska serija ili lanac**. Reč je, dakle, o skupu slučajnih veličina koji možemo prikazati u obliku niza:

$$X_1, X_2, \dots, X_t, \dots$$

[4]Božinović M, Stojanović V.: Matematičke metode i modeli u ekonomji preduzeća, VŠSS Leposavić, 2005.

[5]Božinović M, Boičić R.: *Ekonometrija*, Ekonomski fakultet Kosovska Mitrovica, 2016. (u štampi).

[6]Karlin S.: *A First Course in Stohastic Processes*, Department of Mathematics Stanford University, Stanford, California. Academic press New York 1968.

U suprotnom, ako je skup T neprebrojiv (intervalni) skup onda su realizacije slučajnog procesa moguće u bilo kom realnom vremenskom trenutku, pa se takav slučajni proces naziva **vremenski neprekidan** ili **slučajni proces u užem smislu**. U daljem izlaganju, mi ćemo se posebno zadržati na nekim konkretnim primerima obe vrste slučajnih procesa. No, pre toga, navešćemo neke važne stohastičke karakteristike slučajnih procesa.

Definicija 4.2.1. ***Srednja vrednost*** *slučajnog procesa* $\{X_t\}$ *je realna funkcija*

$$\mu(t) = E\left(X_t\right), \quad t \in T, \tag{4.1}$$

dok je ***kovarijaciona funkcija (kovarijansa)*** *definisana sa*

$$K(t,s) = E\left[X_t - \mu(t)\right]\left[X_s - \mu(s)\right], \quad t,s \in T. \tag{4.2}$$

Srednja vrednost se tumači kao "prosečna" realizacija slučajnog procesa oko koje se, sa manjim ili većim odstupanjem, grupišu sve ostale realizacije. S druge strane, kovarijansa predstavlja meru zavisnosti (korelacije) dva zaseka X_t i X_s datog slučajnog procesa. Posebno je specifičan slučaj jednakih zaseka ($t = s$), kada se dobija **disperzija slučajnog procesa**:

$$D(t) = K(t,t) = E\left[X_t - \mu(t)\right]^2. \tag{4.3}$$

Na kraju, koristeći navedene karakteristike možemo definisati jedno od posebno važnih svojstava slučajnih procesa - pojam stacionarnosti.

Definicija 4.2.2. *Slučajni proces* $\{X_t \,|t \in T\}$ *je* ***stacionaran*** *ako važi:*

(*a*) *Srednja vrednost je konstantna funkcija vremena*

$$\mu(t) \equiv \mu(const)$$

(*b*) *Kovarijansa zavisi samo od razlike vremenskih argumenata:*

$$K(t,s) = \gamma(t-s).$$

4.3 Lanci Markova

U proučavanju nekih složenih dinamičkih sistema uočeno je posebno zanimljivo svojstvo, tzv. **osobina inertnosti** posmatranog sistema. Preciznije rečeno, postoje sistemi (stohastičkog tipa) kod kojih raspodela verovatnoća budućeg stanja sistema zavisi **samo od trenutnog (sadašnjeg) stanja**, a ne od toga kako je i na koji način sistem dospeo u dato stanje. Za ovakve sisteme kažemo da poseduju **svojstvo (osobinu) Markovnosti**. Odgovarajući slučajni proces, koji predstavlja matematički model takvog sistema, nazivamo proces Markova, u čast ruskog matematičara *A. A. Markova* (1856-1922) koji ih je prvi proučavao. Kako ćemo ovde posmatrati isključivo procese sa diskretnim (prebrojivim) skupom stanja, odnosno vremenske nizove (serije, lance), takve stohastičke modele zvaćemo **lanci Markova**. U tom cilju, posmatrajmo niz slučajnih veličina

$$X_0, X_1, X_2, \dots, X_t, \dots$$

za koje pretpostavimo da su diskretnog tipa, tj. da se skup njihovih mogućih vrednosti može napisati u obliku prebrojivog (konačnog) skupa

$$S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}.$$

Za niz $\{X_t\}$ kažemo da predstavlja lanac Markova ako za svaku konačnu kolekciju (izbor) vremenskih indeksa $t > t_r > t_{r-1} > \cdots > t_1$ i svaku kolekciju $\{x_j, x_{j_r}, \cdots, x_{j_1}\} \subseteq S$ mogućih stanja važi

$$P\left\{X_t = x_j \,|X_{t_r} = x_{j_r}, \dots, X_{t_1} = x_{j_1}\right\} = P\left\{X_t = x_j \,|X_{t_r} = x_{j_r}\right\}. \tag{4.4}$$

Drugim rečima, zavisnost Markova predstavlja takvu osobinu da sistem u budućnosti (stanje $t \in \mathbb{N}$) zavisi samo od sadašnjosti (t_r), a ne i od prošlosti ($t_{r-1}, \cdots, t_1$). Na taj način, za proizvoljno $t > m$ možemo uočiti verovatnoće

$$p_{ij}(m,t) = P\{X_t = x_j | X_m = x_i\}$$

koje nazivamo **verovatnoće prelaza** (sistema iz stanja x_i u trenutku m u stanje x_j u trenutku t). U praksi se obično pretpostavlja da verovatnoće prelaza, kao funkcije po m i t, zavise samo od razlike vremenskih indeksa $t-m$. Za takve lance Markova kažemo da su **homogeni** i njih ćemo nadalje posmatrati. U tom slučaju, stavićemo

$$p_{ij}(t) = P\{X_{t+m} = x_j | X_m = x_i\} \tag{4.5}$$

jer posmatrana verovatnoća ne zavisi od m. Reč je, dakle, o verovatnoći da sistem iz stanja x_i predje u stanje x_j za (tačno) t vremenskih koraka. Specijalno, verovatnoće prelaza koje se dobijaju za jedan korak ($t=1$) obeležićemo sa

$$p_{ij} = p_{ij}(1).$$

4.3.1 Jednačine Čepmen-Kolmogorova

Prvi problem kojim ćemo se ovde pozabaviti jeste odredjivanje verovatnoća prelaza $p_{ij}(t)$ za $t \geq 2$, a na osnovu jediničnih verovatnoća p_{ij}. U osnovi njegovog rešavanja leži sledeća činjenica

Teorema 4.3.1. *Za homogen lanac Markova važe* ***jednačine Čepmen-Kolmo gorova****:*

$$p_{ij}(t) = \sum_{k=1}^{n} p_{ik}(m) \cdot p_{kj}(t-m), \tag{4.6}$$

gde je $m \leq t$ proizvoljna vrednost vremenskog indeksa. □

Jednačine Čepmen-Kolmogorova imaju važnu ulogu u odredjivanju vero- vatnoća prelaza posmatranog sistema. Posebno je interesantan slučaj ovih jednačina za $m=1$, kada one postaju

$$p_{ij}(t) = \sum_{k=1}^{n} p_{ik} \cdot p_{kj}(t-1). \tag{4.7}$$

Znači, vrednost verovatnoće $p_{ij}(t)$ dobija se rekuretnim (iterativnim) postupkom na osnovu jediničnih verovatnoća i prethodno odredjenih verova- tnoća, reda $t-1$. Sve verovatnoće prelaza sistema (u t koraka) možemo prikazati pomoću tzv. **matrice prelaza**:

$$\mathbb{P}_t = \begin{bmatrix} p_{11}(t) & p_{11}(t) & \cdots & p_{1n}(t) \\ p_{21}(t) & p_{22}(t) & \cdots & p_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n1}(t) & p_{n2}(n) & \cdots & p_{nn}(t) \end{bmatrix} = \|p_{ij}(t)\|,$$

koja u slučaju $t = 1$ glasi:

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix} = \|p_{ij}\| \,.$$

Na ovaj način, jednačine (4.6) mogu se napisati u kondenzovanijem (matričnom) obliku

$$\mathbb{P}_t = \mathbb{P}_m \cdot \mathbb{P}_{t-m}, \quad m \leq n$$

odnosno, ako stavimo $m = 1$,

$$\mathbb{P}_t = \mathbb{P} \cdot \mathbb{P}_{t-1}.$$

Konačno, poslednja jednakost, nakon t iterativnih koraka, daje

$$\mathbb{P}_t = \mathbb{P}^{\,t} \tag{4.8}$$

čime je zadatak o odredjivanju verovatnoća $p_{ij}(t)$ potpuno rešen. Naime, sve ove verovatnoće, kao članovi matrice $\mathbb{P}_n$, dobijaju se na osnovu matrice $\mathbb{P}$ čiji su članovi jedinične verovatnoće $p_{ij} = p_{ij}(1)$. Na kraju, primetimo da se svaki element - vero vatnoća matrice prelaza nalazi u intervalu $[0, 1]$. Takodje, zbir elemenata prizvoljne vrste iznosi

$$\sum_{j=1}^{n} p_{ij}(t) = \sum_{j=1}^{n} P\{X_{t+m} = x_j | X_m = x_i\} = 1$$

jer je reč o verovatnoći da sistem u t koraka iz stanja x_i predje u bilo koje stanje, a taj dogadjaj je izvestan.

4.3.2 Stacionarnost Markovljevih lanaca

Informacije o stanju sistema opisanog lancem Markova u odredjenom vremenskom trenutku možemo takodje izraziti odgovarajućim verovatnoćama. Neka je

$$p_i(t) = P\{X_t = x_i\}, \quad t \geq 1$$

verovatnoća da sistem u trenutku t bude u stanju x_i, gde je $i = 1, 2, \ldots, n$. Specijalno, verovatnoću stanja x_i u početnom vremenskom trenutku, kada je $t = 0$, označimo sa

$$p_i = p_i(0) = P\{X_0 = x_i\}.$$

Na osnovu verovatnoća p_i i prethodno opisanih verovatnoća prelaza p_{ij} može se odrediti raspodela verovatnoća $p_i(t)$ za bilo koje $t \geq 1$. Ako označimo dogadjaje

$$A = \{X_t = x_i\}, \quad B = \{X_{t-1} = x_k\}$$

onda je, na osnovu formule potpune verovatnoće dobijamo:

$$p_i(t) = P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(B_k) \cdot P(A|B_k) = \sum_{k=1}^{n} p_k(t-1)\, p_{ki}. \tag{4.9}$$

Dakle, verovatnoće stanja sistema u nekom trenutku t mogu se izraziti kao proizvod verovatnoća stanja u prethodnom vremenskom trenutku i odgovarajućih verovatnoća matrice prelaza. Ovu jednakost takodje možemo napisati u matričnom obliku. Označivši, za proizvoljno $t \geq 0$,

$$s\,(t) = \big[p_1(t)\; p_2(t)\; \cdots\; p_n(t)\big],$$

jednačina (4.9) postaje

$$s\,(t) = s\,(t-1) \cdot \mathbb{P}. \tag{4.10}$$

Vektor $s(t)$ naziva se sa **vektor stanja** (sistema u vremenskom trenutku t) i za njegove koordinate važi

$$\sum_{i=1}^{n} p_i(t) = 1, \quad t \geq 0.$$

Na sličan način kao i u prethodnim razmatranjima, rekurzivnim postupkom se na osnovu (4.9) dobija

$$s\,(t) = s\,(0) \cdot \mathbb{P}^t, \quad t \geq 1 \tag{4.11}$$

gde je $s\,(0) = [p_1\; p_2\; \cdots\; p_n]$ vektor stanja sistema u početnom vremenskom trenutku $t = 0$.

Specifičan slučaj Markovljevih sistema jesu **stacionarni lanci Markova**, kod kojih vektor stanja (4.10) ne zavisi od vremenskog trenutka t. Tada je, za proizvoljno $t \geq 0$:

$$s(t) \equiv \left[p_1\ p_2\ \cdots\ p_n\right] \tag{4.12}$$

pri čemu p_i predstavljaju, kao što smo ranije naveli, verovatnoće da sistem bude u stanju $x_i \in S$. Ove verovatnoće, dakle, kod stacionarnih lanaca Markova ne zavise od vremenskog trenutka t u kome se sistem posmatra, pa ih nazivamo **stacionarne verovatnoće**. Vektor stanja je tada jedinstveno odredjen i ne zavisi od t, pa ćemo ga označiti jednostavno sa s. Potrebne i dovoljne uslove stacionarnosti možemo opisati i na sledeći način:

Teorema 4.3.2. *Lanac Markova je stacionaran akko stacionarne verovatnoće zadovoljavaju tzv. homogene jednačine:*

$$p_i = \sum_{k=1}^{n} p_k p_{ki} \tag{4.13}$$

odnosno, u matričnom obliku,

$$s = s \cdot \mathbb{P}. \ \square \tag{4.14}$$

U praksi, uslov stacionarnost Markovljevih lanaca najčešće nije ispunjen. Jasno je da je ovo posledica različitih fluktuacija sistema u vremenu koji, izmedju ostalog, za posledicu ima i promenu verovatnoća vektora stanja. Ipak, jedan od fundamentalnih rezultata Teorije Markovljevih sistema odnosi se na mogućnost da se, bar u graničnom smislu, odrede verovatnoće koje će zadovoljiti sistem homogenih jednačina (4.13). Sledeća teorema, koju navodimo bez dokaza, opisuje dovoljne uslove za njihovu egzistenciju

Teorema 4.3.3. (Teorema Markova) *Za svaki Markovljev lanac sa konačno mnogo stanja $x_1, x_2, \ldots, x_n$ postoje konačne granične vrednosti*

$$p_i^* = \lim_{t\to\infty} p_i(t), \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{4.15}$$

odnosno, granični vektor

$$s^* = \lim_{t\to\infty} s(t). \square \tag{4.16}$$

Običnim jezikom rečeno, tvrdjenje teoreme kaže da će svaki sistem koji funkcioniše kao lanac Markova nakon dovoljno velikog vremenskog interva- la preći u približno stacionarno stanje, tj. verovatnoće stanja sistema neće zavisiti od njegovog stanja na početku posmatranog perioda. Granične verovatnoće stanja sistema p_i^* nazivaju se **finalne (ergodične) verovatnoće**, a mogu se iskazati i u obliku odgovarajućeg, ergodičnog vektora stanja

$$s^* = \Big[p_1^*, \;\; p_2^* \;\; \ldots p_n^*\Big].$$

Ovaj vektor će takodje zadovoljiti sistem homogenih jednčina (4.14), odnosno biće

$$s^* = s^* \cdot \mathbb{P} \iff s^* \cdot \big(I - \mathbb{P}\big) = 0 \tag{4.17}$$

gde je I - jedinična matrica reda n. Jednačine koje se dobijaju na osnovu (4.17) nazivaju se **ergodične jednačine** i omogućavaju, uz korišćenje dodatnog uslova $\sum_{i=1}^{n} p_i^* = 1$, nalaženje ergodičnih verovatnoća p_i^*.

4.4 Prognoza kretanja prinosa akcija Beogradske berze

Na osnovi Teorije Markovljevih lanaca, koja je izložena u pedhodnoj sekciji, realizovali smo istraživanje ponašanja prinosa akcija na Beogradskoj berzi. Skrćeni, kao i puni nazivi kompanija koje smo posmatrali dati su u narednoj Tabeli 1.

Oznaka kom.	Naziv kompanije
NIS	Naftna industrija Srbije, a.d. Novi Sad
FITO	Galenika Fitofarmacija, a.d. Zemun
GMON	Goša montaža, a.d. Velika Plana
AERO	Aerodrom Nikola Tesla, a.d. Beograd
KMBN	Komercijalna banka, a.d. Beograd
VZAS	Veterinarski zavod subotica, a.d. Subotica
IMLK	Imlek, a.d. Beograd
IMPL	Impol Seval, a.d. Sevojno
BMBI	Bambi, a.d. Požarevac
MTLC	Metalac, a.d. Gornji Milanovac

Tabela 1. Kompanije koje su korišćene u istraživanju

Analizirano je po 252. vrednosti stanja za svaku od izabranih kompanija , a cene njihovih akcija posmatrane su prema indeksu BELEX. S'obzirom na ogroman broj podataka u njihovoj obradi korišćene su odgovarajuće softverske aplikacije u EXCELU i programu MATLAB.

Prema podacima sa berze koji sadrže cene akcija odredjenog dana, za svaku od kompanija izračunavan je prinos koji dalje označavamo sa $r_i(t)$ gde je t parametar vremena. Formula koja daje iznos prinosa u danu t glasi:

$$r_i(t) = \ln \frac{P_i(t)}{P_{i-1}(t-1)} \tag{4.18}$$

gde $P_i(t)$ označava cenu akcija u danu t, gde $t \in \{1, 2, \ldots, 252\}$ za svaku kompaniju $i \in \{1, 2, \ldots, 10\}$. Nakon prikupljanja podataka izvršena je raspodela u nekoliko stanja neophodnih za primenu Teorije Markovljevih lanaca. Na taj način dobili smo podatke koji su od značaja za potencijalne investitore, a koji se odnose na kretanje vrednosti akcija pojedinih kompanija čime investitori dobijaju odgovarajuću informaciju o firmi u čije je akcije najoptimalnije investiranje, tj. investitor bi ostvario najveći profit.

Takva situacija se trenutno dogadja sa pojedinim akcijama srpskih kompanije gde čak medjunarodni savetnici i finasijske institucije nekim investitorima predlažu ulaganje u akcije srpskih kompanija s'obzirom na političku stabilnost i rast BDP-a. Tako je evropska banka za razvoj dala izjavu i preporuku potencijalnim investitorima, da bi bilo bolje , na primer, hrvatske akcije zameniti akcijama u Srbiji ili Madjarskoj, kao zemljama sa najboljim rastom BDP-a i sigurnošću investiranja.

Analiza prinosa koji se dobijaju promenom cena akcija na Beogradskoj berzi je pokazala da nema mnogo bitnih promena i svi prinosi mogu da se klasifikuju u tri reprezentativna stanja. U tom smisli sa S_1 označimo stanje kome pripadaju prinosi koji su manji od $-0,5\%$. Sa S_2 označimo stanje u kome se nalaze svi prinosi koji se kreću u intervalu $[-0,5\%, +0,5\%]$ a dobijaju se u slučaju kada se cene akcija u datom trenutku t_i ne razlikuju mnogo od cena istih akcija u nekom prethodnom trenutku t_{i-1}. Na kraju, u stanju S_3 nalaze se svi prinosi koji su veći od $+0,5\%$.

Dalje, potrebno je, za svaku firmu ponaosob, odrediti koliko prinosa sadrži svako od navedenih stanja S_1, S_2 i S_3, a nakon toga izračunati verovatnoću sa kojom se akcije nalaze u jedno od datih stanja. Te verovatnoće u suštini predstavljaju relativne frekvencije koje se izračunavaju kao odnos broja prinosa koji se nalazi u nekom od stanja S_1, S_2 ili S_3 i ukupnog broja prinosa koji u našema slučaju iznosi 252.

U narednoj tabeli prikazani su podaci o broju prinosa koji pripadaji nekom od stanja S_1, S_2 ili S_3 za svaku od posmatranih kompanija posebno koje su navedene u Tabeli 1.

Oznaka komp.	S_1	S_2	S_3	Vektor s_0		
NIS	64	129	59	0, 253968	0,5511905	0,234127
FITO	40	156	56	0, 158730	0, 619048	0,222222
GMON	25	200	27	0,099206	0,793651	0,107143
AERO	81	89	82	0,321429	0,353175	0,325397
KMBN	64	146	42	0,253968	0,579365	0, 166667
VZAS	27	204	21	0,107143	0, 809524	0,083333
IMLK	36	189	27	0, 142857	0,75	0,103175
IMPL	28	198	26	0,111111	0,785714	0, 103175
BMBI	13	232	7	0,051587	0,920635	0,027778
MTLC	33	185	34	0,130952	0,734127	0,134921

Tabela 2. Raspodela prinosa i vrednosti inicijalnih vektora

Navedene vrednoosti u Tabeli 2. takodje prdstavljaju i raspodele verovatnoća sa kojom se prinosi nalaze u nekom od razmatranih stanja, a to su prema Teoriji Markova u stvari koordinate vektora vektora s_0. Svaka od verovatnoća p_{i_k}, gde $i \in \{1,2,3\}$ a $k \in \{1,2,\ldots,10\}$ dobija se kao količnik prinosa f_i koji se nalazi u stanju S_i i sume svih prinosa kojih ima 252, tj. važi formula:

$$p_{i_k} = \frac{f_i}{\sum\limits_{i-1}^{3} f_i} \, . \tag{4.19}$$

Dakle, početni vektor stanja $s_0 = [p_1 \; p_2 \; p_3]$ za kompaniju NIS na osnovu formule (4.19) ima sledeće koordinate:

$$s_0 = [0,253968 \;\; 0,511905 \;\; 0,234127] \, . \tag{4.20}$$

Sada na osnovu prehodnog razmatranja možemo dati interpretaciju vektora (4.20), tj. prognozu kretanja prinosa akcija kompanije NIS: na osonovu verovatnoće $p_1 = 0,253968$ možemo tvrditi da su prinosi kompanije NIS manji od $-0,5\%$ na osnovu verovatnoće $p_2 = 0,511905$ možemo reći da se prinosi akcija nalaze u intervalu $[-0,5\%, +0,5\%]$, dok na osnovu verovatnoće $p_3 = 0,234127$ možemo zaključiti da su prinosi NIS-a veći od $0,5\%$.

Na potpuno isti način interpretiramo koordinate vektora s_0 za ostale kompanije koje smo istraživali a navedene su u Tabeli 1.

Dalje, primenjujemo metodu Markovljevih lanaca na sve ostale kompanije koje su istraživane na potpuno analogan način kao u kompaniji NIS. Matrica koja sadži broj prelaza u ovom slučaju glasi:

$$S = \begin{bmatrix} 26 & 25 & 13 \\ 28 & 79 & 22 \\ 9 & 26 & 24 \end{bmatrix}.$$

Svaki element s_{ij} u matrici S pokazuje broj prinosa koji iz stanja i prelaze u stanje j. Očigledno, po glavnoj dijagonali matrice S nalazi se broj prinosa koji ostaju u istom stanju. Na osnovu ovih podataka izračunava se matrica prelaza P , koja sadrži prelazne verovatnoće koje se dobijaju kao relativne frekvencije, tj. element p_{ij} matrice P predstavlja odnos broja prelaza prinosa iz i-tog stanja u stanje j i ukupnog broja prinosa. Na ovaj način, na primer, za kompaniju NIS matrica P ima sledeći oblik:

$$P = \begin{bmatrix} 0,40625 & 0,390625 & 0,203125 \\ 0,217054 & 0,612403 & 0,170543 \\ 0,152542 & 0,440678 & 0,40678 \end{bmatrix}.$$

Matrica prelaza P, prema teoriji Markova, ima osobinu da je suma u svakoj vrsti jednaka 1., tj.

$$\sum_{j=1}^{3} p_{ij} = 1. \text{ gde je } \quad i = 1, 2, 3.$$

Na potpuno isti način izračaunavaju se i matrice prelaza P za ostale kompanije iz Tabele 1.

Sada prema formuli (4.11) izračunavamo vektor s_1 u prvom narednom periodu i dobijamo:

$$s_1 = [0,25 \quad 0,5159 \quad 0,2341]\,. \tag{4.21}$$

Dalje, prema prethodnoj teoriji Markova imamo:

$$I - P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0,40625 & 0,390625 & 0,203125 \\ 0,217054 & 0,612403 & 0,170543 \\ 0,152542 & 0,440678 & 0,40678 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0,59375 & -0,390625 & -0,203125 \\ -0,217054 & 0,387597 & -0,170543 \\ -0,152542 & -0,440678 & 0,59322 \end{bmatrix}$$

pa na osnovu (4.17) formiramo sistem ergodičnih jednačina:

$$\begin{aligned} 0,59375p_1^* - 0,217054p_2^* - 0,152542p_3^* &= 0 \\ -0,390625p_1^* + 0,387597p_2^* - 0,44067p_3^* &= 0 \\ -0,203125p_1^* - 0,170543p_2^* + 0,59322p_3^* &= 0 \end{aligned} \tag{4.22}$$

na osnovu čega konačno dobijamo ergodični vektor s^* čije su koordinate ergodične verovatnoće:

$$s^* = [0,2491 \quad 0,5170 \quad 0,2339] \ . \tag{4.23}$$

Interpretirajući sada vektor (4.23) možemo dati prognozu sa verovatnoćom $p_1^* = 0,2491$ da će se u budućnosti prinosi akcija kompanije NIS biće manji od $-0,5\%$, sa verovatnoćom $p_2^* = 0,5170$ prinosi akjcija NIS-a kretaće se u intervalu $[-0,5,+0,5]$, dok će prinosi akcija sa verovatnoćom $p_3^* = 0,2339$ biti veći od $0,5\%$.

Na potpuno isti način izvršena je i analiza svih ostalih kompanija iz Tabele 1. i dobijeni su odgovarajući vektori distribucija verovatnoća u prvom periodu, kao i ergodični vektori koji su prikazani za svaku od njih posebno u narednoj Tebeli 3.

Kompanija	Vektor	S_1	S_2	S_3
NIS	s_1	0, 2500	0,5159	0,2341
	s^*	0,2491	0,5170	0,2339
FITO	s_1	0,1587	0,6151	0,2262
	s^*	0,1592	0,6141	0,2267
GMON	s_1	0,1032	0, 7897	0,1071
	s^*	0,1029	0,7894	0,1077
AERO	s_1	0,3214	0,3532	0,3254
	s^*	0,3214	0,3532	0,3254
KMBN	s_1	0,2540	0,5833	0,1627
	s^*	0,2537	0,5850	0,1614
VZAS	s_1	0,1071	0,8135	0,0794
	s^*	0,1066	0,8157	0,0777
IMLK	s_1	0,1389	0,7540	0,1071
	s^*	0,1381	0,7552	0,1068
IMPL	s_1	0,1111	0,7857	0,1032
	s^*	0,1111	0,7857	0,1032
BMBI	s_1	0,0516	0,9206	0,0278
	s^*	0,0516	0,9206	0,0278
MTLC	s_1	0,1310	0,7341	0,1349
	s^*	0,1310	0,7341	0,1349

Tabela 3. Vektori distribucija u prvom narednom periodui i ergodični vektor stanja za sve posmatrane kompanije.

Dalje, analizom rezultata iz Tabele 3., od deset kompanija koje smo istraživali, možemo izdvojiti 4. kompanije kod kojih je verovatnoća da se prinosi nalaze u stanju S_3 jeste veća od verovatnoće da se nalaze u stanju S_1.

To su, pre svega, kompanije FITO, GMON, AERO, i MTLC. Dakle, na osnovu dobijene analize o kretanju prinosa akcija izabranih kompanija Teorijom Markovljevih lanaca, dobili smo podatke koji bi bili interesantni za potencijalne investitore u donošenju odluka u koju kompaniju treba investirati. Naravno, da su to one kompanije čiji su prinosi veći od $0,5\%$.

Na kraju, moramo istaći čijenicu da metodologijom Markovljevih lanaca nije opisan rizik od ulaganja u pojedine kompanije, ali to je mozda i nedostatak ove metode. Medjutim, drugi matematički modeli u ekonometrij koji uklkjučuju i problem rizika, kao što je metoda Markovica, su znatno komplikovanije za primenu, pre svega prema broju parametara koje uključuju u svoj model. Medjutim, kada se napravi komparativna analiza razultata, dobijena drugim ekonometrijskim metodama lako se vidi da se dobijeni rezultati veoma malo razlikuju.

4.5 Primena Markovljevih lanaca u prognozi izbora fakulteta

Rezultati izloženi u okviru ove sekcije motivisani su, pre svega , politikom upisa novih studenata, tj. njihovim opredeljenjem za pojedine univerzitete odnosno fakulteta u Srbiji pa samim tim i za Fakultet za menadžment u Zaječaru. Kada je naš region u pitanju, od velikog je značaja poznavanje opredeljenja maturanata u regionu Timočke krajine, prema fakultetima Republike Srbije. Iz tih razloga mi smo sproveli jednu anketu na odabranom uzorku u vezi sa opredeljenjem maturanata u našem regionu i metodom Markovljecih lanaca dali prognozu njihovih želja i opredeljenja prema pojedinim fakultetima pa i prema FMZ Zaječar.

U prethodnoj sekciji Lanci Markova su detaljno opisani kao matematički model koji je baziran na teoriji verovatnoća i matričnog računa i kao takav koristi se već dugi niz godina kao stohastički modeli u različitim ekonomskim primenama, pre svega u prognozama različitih dogadjaja koji mogu nastupiti sasvim slučajno u nekom vremnskom trenutku.

Dakle, u ovoj sekciji, opisujemo primenu Teorije Markova na istraživanje koje smo sproveli anketirajući maturante srednjih škola u Timočkoj krajini na uzorku iz 2012. godine, koja je referentna godina u ovom eksperimentu.

U tom trenutku od ukupnog broja anketiranih maturanata iz Timočke Krajine, koji su se odlučili za studije, 12% su se opredelili za Fakultet za menadžment, 35% za prirodne nauke, i 53% za ostale društvene nauke. Anketa o daljoj zainteresovanosti maturanata za odgovarajuće fakultete sprovedena tokom jedne godine dala je sledeće rezultate:

1. **Maturanti koji su se opredelili za FMZ**: 65% bi izabralo isti fakultet, 12% bi se opredelilo za prirodne nauke ii 23% bi izabralo ostale društvene nauke.

2. **Maturanti koji su se opredelili za prirodne nauke**: 62% njih bi ostalo pri svom izboru, 6% bi upisali FMZ uu Zaječaru, a ostali 32% bi prešli na neku drugu od društvenih nauka.

3. **Maturanti koji su izabrali neku od društvenih nauka**: 68% su zadovoljni svojim izborom, 14% bi se opredelili za FMZ u Zaječaru i 18% bi upisalo prirodne nauke.

Na osnovu dobijenih podataka iz ankete, naš osnovni cilj jeste da vidimo kakvo je opredeljenje maturanata nakon prve odnosno druge godine, na osnovu čega bi smo magli dati dugoročnu prognozu verovatnoća za izbor željenog fakulteta.

Na osnovu dobijenih rezultata ankete i predhodno izložene Teorije Markovljevih lanaca, u prvom koraku, na osnovu formule (4.10) i (4.11) formiramo vektor stanja u početnom vremenskom trenutku $t = 0$, koji glasi:

$$s(0) = [0,12 \ 0,35 \ 0,53] \ . \tag{4.24}$$

Koordinate vektora s_0 su verovatnoće koje opisuju opredeljenost studenata za studije na FMZ Zaječar, za prirodne nauke ili neku drugu od društvenih nauka.

Matrica prelaza P dobija se uvrštavanjem verovatnoća sa kojima bi maturanti ostali pri svom izboru ili bi eventualno promenili stav o izboru upisa na neki drugi fakultet.

$$P = \begin{bmatrix} 0.65 & 0.12 & 0.23 \\ 0.06 & 0.62 & 0.32 \\ 0.14 & 0.18 & 0.68 \end{bmatrix} \tag{4.25}$$

Posmatrajući matricu (4.26) tj. elemente koji se nalaze na glavnoj dijagonali matrice P, možemo zaključiti da su to verovatnoće sa kojima maturanti planiraju da ostanu na početno izabrani fakultet.

Dalje, primenom formule (4.8) dobojamo prognozu interesovanja maturanata za odredjeni fakultet, nakon druge godine upisa, tj. imamo

$$P^2 = \begin{bmatrix} 0.462 & 0.194 & 0.344 \\ 0.121 & 0.449 & 0.430 \\ 0.197 & 0.251 & 0.552 \end{bmatrix} \tag{4.26}$$

gde je $P^2 = P \cdot P$.

Sada na osnovu formule (4.11) rekurentnim postupkom možemo dati ocenu opredeljenosti maturanata u narednom periodu. Tako, na primer, nakon godinu dana možemo očekivati izbor maturanata za željeni fakultet sa sledećim verova tnoćama:

$$\begin{aligned} s(1) = s(0) \cdot P &= [0,12\ 0,35\ 0,53] \\ &= [0,173\ 0,327\ 0,5]\ . \end{aligned} \tag{4.27}$$

Interpretirajući izraz (4.27) možemo zaključiti da će naredne godine 17.3% maturanata iz Timočke Krajine upisati FMZ u Zaječaru, $32,7\%$ njih opredeliće se za prirodne nauke i 50% maturanata opredeliće se za neki od ostalih fakulteta društvenih nauka.

Na sličan način dobijamo vektor stanja $s(2)$:

$$\begin{aligned} s(2) &= s(1) \cdot P \\ &= s(0) \cdot P^2 \\ &= [0,12\ \ 0,35\ \ 0,53] \cdot \begin{bmatrix} 0,462 & 0,194 & 0,344 \\ 0,121 & 0,449 & 0,43 \\ 0,197 & 0,251 & 0,552 \end{bmatrix} \\ &= [0,202\ \ 0,314\ \ 0,484]\ . \end{aligned} \tag{4.28}$$

Sada na osnovu dobijenih vektora stanja $s(1)$ i $s(2)$, možemo zaključiti da vektor $s(t)$ nije stacionaran, pa na osnovu teoreme Markova 4.3.3. tragamo za graničnim vektorom

$$s^* = [p_1^*\ \ p_2^*\ \ p_3^*]\ ,$$

koji sadrži granične, ili tzv. ergodične, verovatnoćve koje predstavljaju dugoročnu prognozu, a koja ne zavisi vremena t.

Dalje, na osnovu formule (4.17). dobijamo sledeći sistem homogenih jednačina:

$$\begin{aligned} 0,35p_1^* - 0,06p_2^* - 0,14p_3^* &= 0 \\ -0,12p_1^* + 0,38p_2^* - 0,18p_3^* &= 0 \\ -0,23p_1^* - 0,32p_2^* + 0,32p_3^* &= 0\,. \end{aligned} \tag{4.29}$$

S'obzirom da je sistem jednačina (4.29) homogen, to on osim trivijalnog rešenja

$$(p_1^*,\ p_2^*,\ p_3^*) = (0,\ 0,\ 0), \tag{4.30}$$

ima i beskonačno mnogo drugih rešenja do kojih dolazimo izborom za $p_1^* = k$, gde je $k \geq 0$ proizvoljna konstanta koju treba odrediti. Sistem (4.29) dalje rešavamo tako što biramo bilo koje dve jednačine i svodimo ih na sistem od dve jednačina sa dve nepoznate, čijim rešavanjem dobijamo vrednosti nepoznatih $p_2^* = 1,028k$ i $p_3^* = 1,508k$, koja očigledno zavise od izbora vrednosti konstante k. Konačno rešenje sistema (4.29) glasi:

$$(p_1^*,\ p_2^*,\ p_3^*) = (k,\ 1,028k,\ 1,508k)\ . \tag{4.31}$$

Dakle, na osnovu izraza (4.31) vidomo da za svaku proizvoljno izabranu vrednost konstante k dobijamo odgovarajuću trojku $(p_1^*,\ p_2^*,\ p_3^*)$ numeričkih vrednosti redom za svako $p_i^*,\ \ i = 1,\ 2,\ 3$. Medjutim, kako su $p_i^*,\ \ i = 1,\ 2,\ 3$ verovatnoće za koje važi da je

$$\sum_{i=1}^{3} p_i^* = 1\,, \tag{4.32}$$

to konačno doobijamo sledeću relaciju:

$$k + 1,028k + 1,508k = 1. \tag{4.33}$$

Sada iz relacije (4.33) jednostavno dibijamo traženu vrednost konstante k, tj.

$$k = 0,283\,. \tag{4.34}$$

Uvrštavanjem vrednosti konstante k u izraz (4.31) dobijamo traženi ergodični vektor

$$s^* = [p_1^* \;\; p_2^* \;\; p_3^*] = [0,238 \;\; 0,291 \;\; 0,426] \; . \tag{4.35}$$

Na kraju, s'obzirom da ergodični vektor predstavlja granični vektor stanja $s(t)$, to izraz (4.35) možemo interpretirati kao dugoročnu tendenciju interesovanja maturanata na području Timočke krajine, pre svega za Fakultet za menadžment u Zaječaru, a onda i za ostale fakultete prirodnih i društvenih nauka.

Dakle, na osnovu izraza (4.35) možemo zaključiti da se u budućnosti može očekivati da će $28,3\%$, od ukupnog broja maturanata zainteresovanih za studije u Timočkoj Krajini, upisivati Fakultet za menadžment u Zaječaru, $29,1\%$ maturanata bi upisivalo neki od fakulteta prirodnih nauka, a $42,6\%$ bi upisivalo neki od preostalih fakulteta društvenih nauka.

Napomena: S'obzirom da su rezultati dobijeni na relevantnom uzorku, kao takvi mogu poslužiti Fakultetu za menadžment u Zaječaru kao osnova za kvalitetno kreiranje politike upisa na ovaj fakultet, što je i bio osnovni cilj ove analize.

Glava 5

Primena Teorije igara u marketing odlučivanju

Teorija konflikata ili **Teorija igara** nastala je početkom 20-og veka mada se neki pojmovi koji se odnose na nju vezuju za rad *Problémes et délectables, qui se font par les nombres* koji je objavljen u izvesnom zborniku Bachet de Meziriac-a, a poslat je u pismu Paskala[1] koje je upućeno Farmau [2] 29. jula 1654. godine.

Pojam **beskoalicione igre**[3] sa n igrača prvi put se pojavljuje u radu John von Neumann-a i O. Morgenstern-a u radu *Theory of games economic behaviour* koji je objavljen na Prinston Univerzitetu 1947. godine. E. Borel u radu *The Theory of play and integral equations skew symetric kernels* objavljenom 1921. godine uvodi pojam **antagonističke igre**. Termin **matrična igra** pripada G. B. Dantzigu. On je ovaj pojam uveo u radu *A proof of the equivalence function of the programming problem and the inequalites*, dok je pojam **bimatrične igre** uveo N.N. Vorobljev u

[1]Francuski matematičar 1623. - 1662. U 16. godini otkrio je tzv. "Paskalovu teoremu" o šestouglu upisanom u konusni presek 1641. Iza toga pronašao je računsku mašinu. U 25. godini otišao je u manastir Port-Rojal, gde je kao asketa objavio traktat o *Aritmetičkom trouglu* kojeg obrazuju biniomni koeficijenti a koji se pominju u Teoriji verovatnoće. Dosta je radio na integralima, beskonačno velikim i malim veličinama kao i principu totalne indukcije.

[2]Piere de Fermat, francuski matematičar, 1601. - 1665. Radio je u oblasti geometrije, *Tangenta linearnih krivih*, u mat. analizi: *Metod maksimuma i minimuma, Izračunavanje integrala kvadratnih funkcija, itd.*

[3]Vorobljev N.N.: *Osnovi teorii igr- beskoalicionnie igrji*, Moskva 11984.

radu *Situacii ravnovesij v bimatričnih igrah* 1958. godine.

5.1 Beskoalicione ige

Pjam beskoalicionih igara sa n- igrača u radu[4] uveo je Jon Von Nojman 1953., a pojam matrične igre pripada B. Dancigu, dok je pojam bimatrične igre uveo Vorobljev u radu[5]

Navodimo najpre pojam **beskoalicione igre** kao osnovni matematički model strateške igre koji ćemo dalje koristiti.

Definicija 5.1.1. *Beskoaliciona igra jeste sistem*

$$G = \langle I, \{\mathcal{S}_i\}_{i\in I}, \{f_i\}_{i\in I}\rangle \tag{5.1}$$

gde je - $I = \{1, 2, \ldots, n\}$ konačan skup čije elemente nazivamo ***igračima****; - $\mathcal{S}_i$ $(i \in I)$ - proizvoljan skup čije elemente nazivamo* ***strategije*** *odgovarajućih igrača $i \in I$. Izbor $\{\mathcal{S}_i\}_{i\in I}$ strategije igrača, tj. elemente Dekartovog proizvoda*

$$\mathcal{S} = \prod_{i\in I} \mathcal{S}_i \tag{5.2}$$

*nazivamo****situacijama*** *u igri G. Svakom igraču $i \in I$ odgovara ograničena funkcija*

$$f_i : \mathcal{S} \to \mathcal{R} \tag{5.3}$$

koju nazivamo ***funkcijom dobitka*** *toga igrača, a njena vrednost u posebnoj situaciji (izborom konkretne vrednosti $x \in \mathcal{S}$) jeste* ***dobitak*** *igrača u toj situaciji.*

Beskoaliciona igra G definisana u (5.1) naziva se **konačnom**, ako su skupovi svih strategija $\mathcal{S}_i$ igrača iz I konačni. Konačna beskoaliciona igra naziva se **bimatrična** ako je $I = \{1, 2\}$ dvoelementni skup, tj. sadrži samo dva igrača. Ovakav naziv igre G motivisan je sledećim opisom: Ako sastavimo dve matrice u kojima kretanje po vrsti

[4]Von Nojman J.: *On the theori of gamesof strategy*, Prinston University Press, 1959.-453 p.

[5]Vorobljev N. N.: *Situacii ravnovasja v bimatričnih igrah*, Teorija verovatnosti i ee primenjenia, 1958., 3. No 3. s. 318-331.

odgovara strategiji prvog igrača, a kretanje po koloni strategiji drugog igrača, tada te matrice odgovaraju situacijama igre. Ako polja prve matrice popunimo vrednostima funkcije dobitka igrača 1., a polja druge matrice vrednostima funkcije dobitka igrača 2., dobijamo dve matrice koje opisuju igru G. Te matrice nazivamo **matrice igre (matrice plaćanja)** u bimatričnoj igri. Uobičajeno, matrice igre odgovarajućih igrača obeležićemo simbolima A i B, a samu bimatričnu igru oznakom $G(A, B)$.

Definicija 5.1.2. *Beskoaliciona igra G iz* (5.1) *naziva se* ***igrom sa konstantnom sumom****, ako za svaku situaciju $x \in \mathcal{S}$ važi:*

$$\sum_{i \in I} f_i(x) = c. \tag{5.4}$$

Ako je konstanta $c = 0$ tada igru G nazivamo **igra sa sumom nula**. Beskoaliciona igra sa konstantnom sumom može se interpretirati kao model ekonomskog procesa kada na tržištu nema ponude i tražnje za nekim artiklom i u nizu drugih situacija. Neke od njih biće opisane u ovom radu. Beskoaliciona igra sa sumom nula u kojoj nastupaju samo dva igrača, tj. $I = \{1, 2\}$, naziva se **antagonistička igra**. Na taj način, u svakoj antagonističkoj igri dobitak jednog igrača jednak je gubitku drugog, tj.

$$f_1(x_1, x_2) = -f_2(x_1, x_2)$$

za sve strategije igrača $x_1 \in \mathcal{S}_1$ i $x_2 \in \mathcal{S}_2$. Dakle, funkcijom dobitka prvog igrača potpuno je opisana funkcija dobitka drugog igrača, i obratno. Sve strategije kao i iznosi pojedinih dobitaka, odnosno gubitaka date su u matrici plaćanja a zajedenička dobit oba igrača u ovoj igri jednak je nuli. Pri definisanju modela matrica plaćanja kreira se za jednog od igrača. Ako je igra G antagonistička, tada je njen skup zadan trojkom

$$G = \langle \mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, f \rangle \tag{5.5}$$

gde su $\mathcal{S}_1$ i $\mathcal{S}_2$ skupovi strategija igrača, a $f : \mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2 \longrightarrow \mathcal{R}$ funkcija igre.

Definicija 5.1.3. *Antagonistička bimatrična igra naziva se* ***matrična igra****.*

U definiciji 5.1.3 matrična igra je definisana kao konačna antagonistička igra $G = \langle \mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, f \rangle$ u kojoj su skupovi strategija igrača konačni, tj. $\mathcal{S}_1 = \{x_1, \ldots x_m\}$ i

$\mathcal{S}_2 = \{y_1, \ldots, y_n\}$. Odnos strategija i dobitka oba igrača u matričnoj igri G mogu se prikazati tablicom:

Igrač I_1	Igrač I_2				
	y_1	y_2	y_j	$\cdots$	y_n
x_1	$f(x_1, y_1)$	$\cdots$	$f(x_1, y_j)$	$\cdots$	$f(x_1, y_n)$
x_2	$f(x_2, y_1)$	$\cdots$	$f(x_2, y_j)$	$\cdots$	$f(x_2, y_n)$
$\vdots$ x_i	$\vdots$ $f(x_i, y_1$	$\cdots$	$\vdots$ $f(x_i, y_j)$	$\cdots$	$\vdots$ $f(x_i, y_n)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_m	$f(x_m, y_1)$	$\cdots$	$f(x_m, y_j)$	$\cdots$	$f(x_m, y_n)$

gde je svaki horizontalni red strategija prvog igrača, a vertikalni red je strategija drugog igrača. U tabeli je svaka situacija u igri opisana kvadratom popunjenim vrednošću funkcije dobitka igre prvog igrača, koja ujedno predstavlja gubitak drugog igrača. Gore navedena tablica može se jednostavnije prikazati matricom

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{5.6}$$

gde je

$$a_{ij} = f(i, j), \quad (i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n)$$

ranije opisana vrednost dobitka, odnosno gubitka igrača u pojedinim situacijama igre. Matrica A naziva se **matrica dobitka**, **matrica plaćanja** ili **matrica igre**. Ako je A matrica igre G, tada matričnu igru označavamo sa $G(A)$ ili G_A. Jasno je da sva tvrdjenja koja važe za proizvoljne antagonističke igre, u potpunosti važe i za matrične igre, s obzirom na način kako su one definisane. Ovo se objašnjava time što bimatrična igra $G(A, B)$ jeste antagonistička ako je $B = -A$, pa je ova igra potpuno opisana matricom dobitka A prvog igrača. Dakle, prvi igrač može birati izmedju m, a drugi izmedju n strategija pa je matrica plaćanja u ovoj igri formata $m \times n$.

5.1.1 Igre sa čistom strategijom

Posmatrajmo, najpre, opšti slučaj antagonističke igre za koju pretposta- vimo da važe sledeća pravila:

1. Igrači u svakom trenutku biraju sebi najpovoljnije rešenje, tj. vrše racionalan izbor strategija.

2. Pri izboru odredjene strategije igrači nemaju nikakvu informaciju o tome kakvu je strategiju izabrao njihov protivnik.

Sada se, kao fundamentalno pitanje, postavlja problem nalaženja optimalnih strategija oba igrača $x^* \in \mathcal{S}_1$ i $y^* \in \mathcal{S}_2$ koje će obezbediti ispunjavanje tzv. **ravno težnih uslova** u igri.

Pojam situacije ravnoteže u igri dva igrača uveo je O. Kurno u radu [6] , dok je opšti slučaj opisao Džon Neš u radu [7] Aksiomatski opis situacije ravnoteže u igri dao je Vilkasu I. u radu [8]

To, u stvari, znači da prvi igrač, izborom svoje optimalne strategije x^* obezbedjuje odredjeni, zagarantovani dobitak $f(x^*, y^*)$ pri ma kakvom izboru strategija svog protivnika. Dakle, za bilo koju strategiju drugog igrača $y \in \mathcal{S}_2$ važiće

$$f(x^*, y^*) \leq f(x^*, y).$$

Slično, drugi igrač, pod pretpostavkom racionalnog ponašanja, bira optimalnu strategiju $y^* \in \mathcal{S}_2$ čijim izborom osigurava maksimalnu vrednost gubitka $f(x^*, y^*)$. Znači, za svaku strategiju prvog igrača $x \in \mathcal{S}_1$ važiće

$$f(x^*, y^*) \geq f(x, y^*).$$

Poslednje dve nejednakosti možemo objediniti u jednu, tj.

$$f(x, y^*) \leq f(x^*, y^*) \leq f(x^*, y) \tag{5.7}$$

[6]Kurno O.: *Resharches sur les principes mathmatiques de la theorie de richesses* Paris, 1838. - 258 p.

[7]Neš Dž.: *The bergaining problem*, Econometricaa 1950. 18, p 155-162.

[8]Vilkasu I.: *Aksiomatičeskoe opredelenije situacii ravnovesija i i znaěnia beskoalicionoi igri n-lica*, Teorija verovatn. i primene, 1968. 13, No 3, c. 586-591

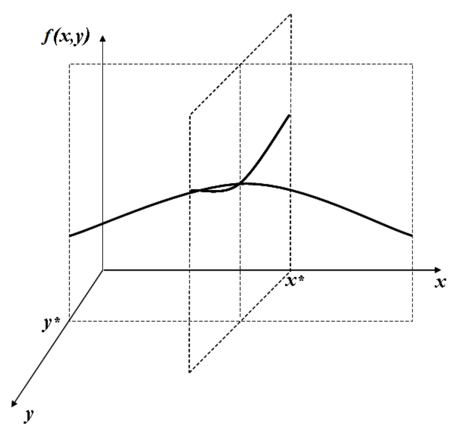
za sve $x \in \mathcal{S}_1$ i $y \in \mathcal{S}_2$. Vrednost funkcije f koja se dobija izborom optimalnih strategijama x^*, y^* predstavlja **optimalnu vrednost igre** G, u oznaci:

$$\nu(G) = f(x^*, y^*). \tag{5.8}$$

Najzad, situacija $(x^*, y^*) \in \mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2$ u antagonističkoj igri $G = \langle \mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, f \rangle$ za koju je ispunjen uslov (5.7) jeste **situacija ravnoteže** , odnosno **sedlasta tačka** funkcije dobitka f, odnosno igre G. Naziv je opravdan geometrijskom interpretacijom koja je prikazana na slici 5.1. Kao što vidimo, svako uda- ljavanje od tačke (x^*, y^*) po koordinati x vodi ka manjoj vrednosti funkcije f, a udaljavanje po y koordinati vodi ka većoj vrednosti za f.

Navodimo, sada, tvrdjenje koje daje dovoljne uslove za egzistenciju sedlaste tačke u antagonističkoj igri. Antagonistička igra $G = \langle \mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, f \rangle$ ima sedlastu tačku (x^*, y^*) akko važi jednakost

$$f(x^*, y^*) = \max_{x \in \mathcal{S}_1} \inf_{y \in \mathcal{S}_2} f(x, y) = \min_{y \in \mathcal{S}_2} \sup_{x \in \mathcal{S}_1} f(x, y). \tag{5.9}$$



Slika 5.1:

Osnovni princip optimizacije u matričnim igrama, kao i u proizvoljnoj antago nostičkoj igri, jeste princip koji se sastoji u realizaciji situacije ravnoteže (5.7) u igri G, tj. u odredjivanju sedlaste tačke (x^*, y^*) funkcije dobitka igre f. Taj princip zahteva da se u igri $G(A)$ sa matricom igre $A = ||a_{ij}||_{m \times n}$ izabere takva vrsta i^* i kolona j^* matrice igre A tako da važi:

$$a_{ij^*} \leq a_{i^*j^*} \leq a_{i^*j}.$$

U slučaju matričnih igara koje su, kao što smo naveli, u potpunosti opisane matricom igre A, odredjivanje sedlaste tačke je dosta pojednostavljeno. Pre svega, uslov minimax-a (5.9) dobija tada vrlo jednostavan oblik. Ipak, radi metodologije izlaganja i, pre svega, praktične primene teoretskih rezultata u rešavanju različitih problema i zadataka, opisaćemo detaljnije primenu minimax principa u matričnim igrama. Posmatrajmo najpre igrača 1. i njegove mogućnosti izbora optimalne strategije. Prema matrici igre A, njemu je na raspolaganju tačno m strategija koje smo označili elementima skupa $\mathcal{S}_1 = \{x_1, \ldots, x_m\}$. Izborom strategije x_i on dobija jedan od sledećih iznosa

$$a_{i1}, \ldots, a_{in}$$

koji, jasno, predstavljaju i-tu vrstu matrice igre A. Sama vrednost dobitka prvog igrača zavisi sada od izbora odredjene strategije njegovog protivnika. U najnepovoljnijem slučaju, prvi igrač dobija najmanji od gore navedenih iznosa, koji ćemo označiti

$$\alpha_i = \min_j (a_{ij}). \tag{5.10}$$

Sada, za igrača 1. najpovoljnija biće ona strategija kojoj odgovara najveći dobitak iz (5.10), tj.

$$\alpha^* = \max_i (\alpha_i) = \max_i \min_j (a_{ij}). \tag{5.11}$$

Vrednost α^* predstavlja, dakle, minimalni (zagarantovani) dobitak prvog igrača, bez obzira na to koju će od svojih strategija primeniti drugi igrač. S druge strane, dobitak će biti veći od α^* ukoliko drugi igrač ne odabere najoptimalniju strategiju. Zato ćemo, u daljem tekstu, vrednost α^* zvati **donja granica igre**. Sličnim postupkom sada možemo odrediti optimalan izbor strategije igrača 2. Najpre odredjujemo proizvoljnu strategiju y_j iz skupa $\mathcal{S}_2 = \{y_1, \ldots, y_n\}$ za koju je matricom igre A odredjena vrednost potencijalnih gubitaka ovog igrača

$$a_{1j}, \ldots, a_{mj}.$$

Jasno, reč je o elementima j-te kolone matrice A. Sada, najnepovoljnija mogućnost za igrača 2. jeste da njegov protivnik izabere strategiju za koju će vrednost funkcije dobitka f biti najveća od svih gore navedenih vrednosti, tj.

$$\beta_j = \max_i (a_{ij}). \tag{5.12}$$

Za igrača 2. je tada najpovoljnije da odabere onu strategiju kojom će on imati najmanji mogući gubitak opisan izrazom (5.12). Na taj način, odredjena je **gornja granica igre**

$$\beta^* = \min_j (\beta_j) = \min_j \max_i (a_{ij}) \tag{5.13}$$

koja predstavlja najveći mogući gubitak drugog igrača, bez obzira na izbor strategije njegovog protivnika. Dalje bez dokaza navodimo jedan važan rezultat Teorije igara

Za donju i gornju granicu igre $G(A)$ važi nejednakost

$$\alpha^* \leq \beta^*. \tag{5.14}$$

Ukoliko je $\alpha^* = \beta^*$, onda matrična igra ima sedlastu tačku, tj. postoje optimalne strategije $x_{i^*} \in \mathcal{S}_1$ i $y_{j^*} \in \mathcal{S}_2$ za koje važi

$$a_{i^* j^*} = \alpha^* = \beta^*. \tag{5.15}$$

Uslov jednakosti donje i gornje granice igre omogućava nam, dakle, jednostavan postupak nalaženja sedlaste tačke, odnosno optimalnih strategija oba igrača u ma kojoj matričnoj igri. Za ovakve igre tada kažemo da poseduju **čistu (optimalnu) strategiju**. Optimalnu vrednost igre

$$\nu(G) = \alpha^* = \beta^* \tag{5.16}$$

koja istovremeno predstavlja zagarantovani, najmanji iznos dobitka igrača 1., ali i najveći mogući iznos gubitka igrača 2., nalazimo kao zajednički element vrste i kolone matrice A koje odgovaraju optimalnim strategijama x_{i^*}, y_{j^*}. Na taj način, matrična igra je u potpunosti rešena.

Dakle, optimalna čista strategija u igri sa sedlastom tačkom jednostavno se može odrediti pomoću **minimax** kriterijuma koji su napred opisani, a koji počivaju na predpostavci da svaki igrač odabere onu strategiju kojom maksimizira svoj minimalni dobitak, a istovremeno mininimizaira maksimalni gubitak. U slučaju kada se radi o igri G koja ima sedlastu tačku igrači tada ne moraju skrivati svoje strategije sobzirom da ni jedan od igrača, promenom strategije, nije u stanju da popravi svoj rezultat, pa je igra G u ovom slučaju u stanju ravnoteže.

Ukoliko matrica igre A nema sedlastu tačku, igrači nemaju mogućnost izbora optimalnih (čistih) strategija koje im omogućavaju jedinstveno odredjene granice dobitka, odnosno gubitka. Odredjivanje optimalne strategije igrača zasniva se tada na uvodjenju **elemenata slučajnosti** u samoj igri, koja se ogleda u formiranju niza verovatnoća sa kojima svaki od njih bira odredjenu strategiju. Dakle, oni ne biraju samo jednu strategiju, već se odlučuju za više njih, sa odredjenom verovatnoćom. Tako, recimo prvi igrač koji na raspolaganju ima m strategija svaku od njih može odabrati sa verovatnoćama

$$\xi_1, \ldots, \xi_m,$$

dok ćemo odgovarajuće verovatnoće izbora n strategija drugog igrača označiti sa

$$\eta_1, \ldots, \eta_n.$$

Pritom je, jasno, ispunjen uslov nenegativnosti

$$\xi_i \geq 0,\ \eta_j \geq 0, \qquad (i = 1, \ldots, m;\ j = 1 \ldots, n)$$

ali i normiranosti

$$\sum_{i=1}^{m} \xi_i = \sum_{j=1}^{n} \eta_j = 1,$$

jer će oba igrača, sasvim izvesno, odabrati bar jednu od ponudjenih strategija. Sve moguće izbore verovatnoća gore navedenog oblika nazivamo **mešovitim strategijama** date igre.

5.2 Odlučivanje bazirano na teoriji igara

U okviru ove sekcije razmatramo primenu Teorije igara, specijalno **Antagonističke igre** , u raznim slučajevima konfliktnih situacija koje mogu nastupiti na tržištiu. Konstruisani matematički model koji dalje opisujemo, kreiran je u opštem slučaju, medjutim kao i svi modeli sličnog tipa može se primeniti u raznim oblastima istraživanja, pa i u ekonomiji.

U ovom slučaju naš osnovni motiv nalazimo u nekim problemima marketinga, tj. investiranja u raznim markentiškim poslovima, od kojih smo izdvojili veoma čest markentiški problem investiranja u reklame nekih proizvoda i naravno pitanje povratnih efekata tj. uticaja tih investicija na tražnju za datim proizvodom, što može da bude od velike koristi marketing menadžerima u slučaju kada treba da donesu kvalitetnu odluku baziranu na egzaktnim činjenicama.

U savremenom marketingu, zadnjih nekoliko godina, uključen je veoma širok spektar matematičkog aparata kao što je Matematička statistika, Teorija verovatnoća, Teorija igara, razne softverske aplikacije kao i niz drugih matematičkih disciplina čime je stvorena osnova za kvalitetnu kvantitativnu analizu tržišta, a na taj način top menadžerima omogućeno donošenje poslovnih strategija na egzaktnim čijenicama čime se kvalitet njihovih odluka podiže na znatno viši nivo.

Matematički modeli koji su konstruisani i opisani u okviru ove sekcije su originalni i motivisani su nekim delovima Teorijom igara, Teorije verovatnoća i matemati čke statistike, a objavljeni su u radu [9]

Matematičko modeliranje kao proces danas se sve više širi na razna područja, kako prirodnih tako i društvenih nauka, posebno ekonomije, s'obzirom da u ovoj oblasti istraživači nalaze veoma jake motive i inspiraciju za istraživanjem. Razlog tome su svakako veoma turbulentna kretanja, krize i konflikti koji se javljaju u raznim oblicima lokalnih a i ekonomija na globalnom novou.

Savremeni problemi na tržištu uopšte, a posebno konflikti visokog intenziteta na finansijskom tržištu koji su danas veoma aktuelni, svakako su dobra motivacija da se aktivira matematičko znanje i na egzaktan način razreše veoma teški i zamrešeni problemi ekonomije u današnjem trenutku, kada je kriza zahvatila i najrazvijenije

[9]Stojanović V, Božinović M, Petković N.: *Softvare implementacion of the model of game theory in marketing decisions*, Medjunarodna konfernecija MIT, sa učesćem naučnika iz Ruske federacije, Vrnjačka Banja, 2013. Ovaj rad ušao je u 10. radova koje su Rusi odabrali za stampu u njihovom časopisu.

ekonomije sveta. Naravno, danas je mnogo lakše proizvesti neki artikal nego prodati ga. U tom smislu savremeni marketing ima razvijene metode i modele reklamiranja proizvoda , ali se one svakako mogu unaprediti uzimajući u obzir pre svega moguću rekciju konkurencije na tržištu.

Opšte je poznato da potrošači svoju odluku o kupovini nekog artikla uglavnom donose pod danas veoma agresivnim, a po nekad i veoma iritirajućim uticajem raznih medija, posebno Televizje, koji po nekad zbog svoje upornosti i agresije na potrošače mogu da izazovu i kontra efekat. Iz tih razloga marketing - menadžeri problemu reklama i oglašavanja svojih proizvoda treba da posvete posebnu pažnju i izaberu onaj način prezentacije proizvoda koji pre svega optimizira troškove reklame sa očekivanim efektima koje ta reklama treba da proizvede kod potrošača, sa jedne strane, a sa druge moraju uzeti u obzir i sve aktivnosti konkurencije.

Iskustvena je činjenica da će konkurencija svakako reagovati sobzirom da kampanja reklamiranja jednog pro izvoda svakako utiče na tražnju istog ili sličnih proizvoda kod konkurentskih kompanija, što u krajnjem slučaju stvara jednu **ko nfliktnu situaciju** na tržištu. Konačni ishod ovakovog konflikta zavisi pre svega od izbora i kombinacija strategija koje su dve antagonistički pozicionirane strane odabrale. Izbor neodgovarajućih strategija i skladu sa tim donošenje pogrešnih poslovnih odluka u takvim okolnostima za posledicu svakako ima smanjenje tražnje, a sa druge strane i gubitka tržišne pozicije koju kompanija ima.

Konstrukcijom odgovarajućih matematičkih modela, rizik koji neminovno nasteje kao posledica bilo kakvog konflikta, u ovakvim situacijama moguće je eliminisati ili bar svesti na najmanjumoguću meru. [10]

Teorija igara koja u operacionim istraživanjima ima veliku primenu, pre svega u optimizaciji raznih konfliktnih situacija, pa je na taj način usko povezana sa Teorijom odlučivanja. Matematički modeli kreirani u Teoriji igara omogućavaju analizu raznih

[10]Konflikti koji su generisani sve intenzivnijom tržišnom utakmicom kako na lokalnim tako i na globalnom tržištu, kao i niz sličnih situacija kaji nastaju u raznim vojnim sukobima kojih danas ima na pretek, političke kampanje i slični antagonizmi, drugom polovinom 20 veka, doveli su matematičare na ideju o stvaranju Teorije igara kao logistike u donošenju važnih odluka u raznim konfliktnim situacijma

situacija u kojima ishod igre dva ili više igrača ne zavisi samo o jednom od njih, naprotiv, na ishod igre utiču svi učesnici u igri. Naravno, da izbor strategije jednog od igrača, zavisi o očekivanim reakcijama ostalih učesnika u igri.

Dakle, ako bi smo napravili paralelu sa donošenjem odluka menadžera , tada je jasno da su njihove odluke svakako medjuzavisne. Sa aspekta Teorije igara cilj svakog igrača je pravovremena reakcija na akciju protivnika kako bi ostvario što bolji rezultat. Prostor odlučivanja u Teoriji igara opisan je kombinacijama svih raspoloživih strategija, tj. akcijaama koje igrači mogu preduzeti tokom igre. Fundamentalno pitanje u Teoriji igara je pronalaženje odgovarajućih kriterijuma za izbor optimalnih strategija.

U ovom slučaju nužno je napraviti razliku izmedju **čiste** i **mešovite** strategije. Naime, o čistoj strategiji radi se u slučaju kada se igrači u svakoj partiji, koja predstavlja pojedinačnu realizaciju igre G, opredeljuju samo za jednu od mogućnosti koje im stoji na raspolaganju. Medjutim, kod mešovitih strategija izbor igrača nije u svakoj situaciji istovetan, što dalje znači da se mešovita strategija sastoji od učešća raznih mogućnosti izbora. Zavisno od medija u kojima se dva konkurenta reklamiraju, oni svakako imaju na raspolaganju odredjen broj strategija.

Matrica plaćanja u modelu igre G formira se na osnovu procenjenih efekata svih mogućih kombinacija strategija u dnosu na procentualnu promenu tržišnog učešća jednog igrača. Osnovna karakteristika modela koji ćemo dalje razmatrati sastoji se u **simulaciji** procentnog učešća, pri čemu predpostavljamo da slučajne promenljive koje ih reprezentuju imaju **normalnu raspodelu** čije parametre moramo proceniti na osnovu relevantnih podataka, dok se generisanje odgovarajućih numeričkih vrednosti može realizovati sa odgovarajućim softverskim paketom na računaru. Pošto se formira matrica plaćanja u igri G čiji su elementi simulirane vrednosti procentnog učešća na tržištu svakog od njih, model se može transformisati u model **linearnog programiranja**, o kome je bilo reči u predhodnoj tački. Nakon realizacije odgovaraajućih procedura, tj. simulacije i rešavanja zadatka linearnog programa, naredni korak sastoji se u formiranju distribucija frekvencija odgovarajućih strategija, a zatim se za svaku od distribucija izračunava **aritmetička sredina**. Konačno, na taj način dobijeni rezultati predstavljaju udeo strategija koji obezbedjuju najveće dobitke u postavljenoj igri G.

Mi ćemo se dalje baviti ovom problematikom sa ciljem da razvijemo originalni model baziran na Teoriji igara koji se može primeniti u donošenju poslovnih odluka u oblasti **marketinga** pa na taj način, u krajnjem slučaju, i **menadžmenta**. Za primenu modela razvijen je i originalni softver kao logistička podrška koji operacionalizuje i znatno olakšava njegovu primenu.[11]

5.3 Konstrukcija modela

Matematički aparat koji nam je potreban za opisivanje problema odlučivanja baziran na Teoriji igara u oblasti marketinga, odnosi se pre svega na pojmove beskoalicionih igara, na antagonističke i matričnie igre sa sumom nula, o kojima je bilo reči na početku ovog pglavlja. U takvoj igri, dva igrača, kao medjusobno suprotstavljene strane u konfliktnoj situaciji imaju na raspolaganju konačan broj strategija čijim izborom nastaju razne situacije u samoj igri. Pri tom, dobitak jednog igrača ekvivalentan je gubitku drugog igrača, pa je zajednički **dobitak** oba igrača jednak nuli. Sve strategije, kao i pojedinačne dobitke jednog, odnosno gubitke drugog igrača, unosimo u matricu plaćanja igre G koja u opšten slucaju ima sledeći oblik:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{5.17}$$

U matrici A svaki horizontalni red (vrsta) predstavlja izbor jedne od m mogućih strategija prvog igrača, a svaki vertikalni red (kolona) izbor jedne od n strategija drugog igrača. Najzad sami elementi matrice plaćanja A

$$a_{ij} = f(i, j), \quad (i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n),$$

[11] Autori originalnog softvera koji je kreiran za potrebe simulacije nekih statističkoh parametara u ovom matematičkom modelu su prof. dr Vladica Stojanović, prof. dr Milan Božinović i mr Nina Petković, Prirodno-matematički i Ekonomski fakultet Univerziteta u Kosovskoj Mitrovici i FMZ Zaječar, a publikovan je u [76].

predstavljaju vrednost dobitka prvog, odnosno vrednost gubit drugog igrača pri izbo ru odgovarajućih strategija, tj. u pojedinim situacijama igre. Osnovni princip optimizacije u matričnim, kao i u ma kojoj antagonističkoj igri, jeste jeste princip koji se sastoji u realizaciji tzv. **situacije ravnoteže**. Taj princip zahteva da se u igri G_A izabere vrsta i^* i kolona j^* matrice igre $A = [a_{ij}]$ tako da važi:

$$a_{i^*j^*} \leq a_{i^*j^*} \leq a_{i^*j^*} \tag{5.18}$$

To u stvari, znači da prvi igrač, izborom svoje optimalne strategije i^* obezbedjuje odredjeni, zagarantovani dobitak $a_{i^*j^*}$ pri ma kakvom izboru strategije j svog protivnika, tj. drugog igrača. Slično, drugi igrač, pod predpostavkom racionalnog ponašanja , bira optimalnu strategoju j^* čijim izborom osigurava maksimalnu vrednost gubitka $a_{i^*j^*}$. Na taj način, i^* i j^* predstavljaju **optimalne strategije** u igri G_A, dok je $a_{i^*j^*}$ **sedlasta tačka**, odnosno **optimalna vrednost** igre G_A, u oznaci

$$v^* = v(G_A) = a_{i^*j^*} \tag{5.19}$$

U igri u kojoj postoji jedinstvena optimalna strategija oba igrača ni jedan od igrača ne može poboljšati svoj rezultat primenom strategije, pa je takva igra u stanju **ravnoteže**. Za ovakve igre tada kažemo da poseduju **čiste - optimalne strategije**, pa je na taj način, matrična igar u potpunosti rešena.

5.3.1 Matrične igre sa mešovitim strategijama

U koliko matrica igre A nema sedlastu tačku, u tom slučaju igrači nemaju mogućnost izbora optimalnih (čistih) strategija koje im omogućavaju jedinstveno odredjene granice dobitaka, odnosno gubitka. Odredjivanje optimalne strategije igrača, u tom slučaju, zasniva se na uvodjenju **elemenata slučajnosti** u samoj igri, koja se ogleda u formiranju niza verovatnoća sa kojima svaki od njih bira odredjenu strategiju. Dakle, oni ne biraju samo jednu strategiju, već se odlučuju za više njih, sa odredjenom verovatnoćom, pa takve strategije nazivamo **mešovitim strategijama**.

Predpostavimo da prvi igrač, koji na rasplaganju ima m strategija, svaku od njih može odabrati sa verovatnoćom $p_1, \ldots, p_m$ dok ćemo verovatnoće izbora n strategija drugog igrača označiti sa $q_1, \ldots, q_n$, pri čemu je jasno da uslov nenegativnosti, tj. $p_i \geq$, $q_j \geq 0$, ka i uslov normiranosti

$$\sum_{i=1}^{m} p_i = \sum_{j=1}^{n} q_j = 1, \tag{5.20}$$

jer će oba igrača, sasvim sigurno, odabrati bar jednu od ponudjenih strategija. Sve moguće izbore verovatnoća gore navedenog oblika nazivamo **mešovitim strategijama** date matrične igre G_A. Optimalna strategija u igrama sa sumom nula izmedju dva igrača može se odredioti na više različitih načina. Ipak, jedan od najopštijih načina rešavanja ovakve igre jeste da se on izrazi kao problem **linearnog programiranja**.čime se ujedno stvara mogućnost za softversku implementaciju matematičkog modela igre. U tu svrhu uvodima najpre sledeće pojmove:

Definicija 5.3.1. *Matrične igre G_A i G_B sa matricama igre A i B istog formata mn, nazivaju se* ***afino ekvivalentne*** *ako postoje $k > 0$ i $\tau \in R$, takvi da je*

$$B = k \cdot A + \tau \cdot 1_{m \times n}, \tag{5.21}$$

gde je $1_{m \times n}$ jedinična matrica istog formata kao i matrice A i B.

Neposredno se proverava da afino ekvivalentne igre imaju iste skupove optimalnih strategija, pri čemi je

$$v(G_A) = k \cdot v(G_B) = \tau \tag{5.22}$$

U specijalnom slučaju, kada je $k = 1$, igre G_A i G_B zovemo **ekvivalentnim igrama**. Opšti postupak nalaženja optimalnih mešovitih strategija zasnovan je, kako smo napred istakli, na direktnoj primeni linearnog programiranja, odnosno **Simpleks metoda**. Pritom, na osnovu napred uvedenih pojmiova, za proizvoljnu matričnu igru G_A, odredjenu matricom igre $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, možemo predpostaviti da je $\min(a_{ij}) \geq 0$. Dalje, formiramo model linearnog programiranja za prvog igrača, pri čemu su koordinate vektora $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_m)^T$ verovatnoće da prvi igrač izabere strategiju $i = 1, \ldots, m$. U suprotnom, ako uslov nenegativnosti nije ispunjen, u tom slučaju posmatramo ekvivalentnu igru sa matricom

$$A' = A + \tau \cdot 1_{m\times n} \tag{5.23}$$

gde je $\tau =\mid \min(a_{ij}) \mid$. Uvedimo, sada vektor

$$\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_m)^T = \frac{1}{v(p)} \cdot \mathbf{p} \tag{5.24}$$

gde je

$$v(\mathbf{p}) = \min\left(\sum_{i=1}^{m} p_i a_{i1}, \sum_{i=1}^{m} p_i a_{i2}, \ldots, \sum_{i=1}^{m} p_i a_{im}\right). \tag{5.25}$$

Pokazuje se tada da je optimalna vrednost igre $v^* = \max v(\mathbf{p})$, kao i da je nalaženje optimalne mešovite strategije $\mathbf{p}^* = (p_1^*, \ldots, p_m^*)$ ekvivalentno rešavanju sledećeg problema linearnog programiranja, vidi [3], [13], [18],:

Naći optimalnu verednost funkcije

$$\min F_1(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{m} x_i = \frac{1}{v^*} \tag{5.26}$$

$$A^T \cdot \mathbf{x} \geq 1_{m\times n}, \tag{5.27}$$

gde je (5.27) *sistem ograničenja, tj. sistem nejednačina, pisan u matričnom obliku.*

Na potpuno sličan način možemo konstruisati i matematički model linearnog programiranja za drugog igrača. U tom smislu sa $\mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_n)^T$ označimo verovatnoće izbora neke od strategija $j = 1, \ldots, n$ drugog igrača, kao i

$$\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)^T = \frac{1}{v\left(\mathbf{q}\right)} \cdot \mathbf{q} \tag{5.28}$$

gde je

$$v\left(\mathbf{q}\right) = \max\left(\sum_{j=1}^{n} q_j a_{1j}, \sum_{j=1}^{n} q_j a_{2j}, \ldots, \sum_{j=1}^{n} q_j a_{mj}\right). \tag{5.29}$$

Sada, na osnovu tako postavljenih uslova imamo sledeći problem linearnog programiranja u obliku standardnog problema maksimuma:

Naći optimalni - maksimalnu vrednost finkcije

$$\max F_2\left(\mathbf{y}\right) = \sum_{j=1}^{n} y_j = \frac{1}{v^*} \tag{5.30}$$

$$A \cdot \mathbf{y} \leq 1_{n \times m} \tag{5.31}$$

gde je (5.31) *sistem ograničanja, tj. sistem nejednačina, pisan takodje u matričnom obliku.*

Očigledno da se u ovom slučaju radi o problemu linearnog programiranja koji je dualan sa ranije opisanim problemom minimuma, pa je iz tog razloga dovoljno, primenom principa dualnosti, naći optimalno rešenje bar jednog od njih, a rešenje drugog dobija se dualno. Nakon odredjivanja sistenma vektora (x^*, y^*) koji predstavljaju tražena optimalna rešenja navedenih problema linearnog programiranja, optimalne mešovite strategije prvog i drugog igrača dobijaju se na sledeći način, tj. po obrascima:

$$\mathbf{p}^* = v^* \cdot \mathbf{x}^*, \qquad \mathbf{q}^* = v^* \cdot \mathbf{y}^*, \tag{5.32}$$

pri čemu je

$$v^* = \frac{1}{F_1(\mathbf{x}^*)} = \frac{1}{F_2(\mathbf{y}^*)}. \tag{5.33}$$

Na ovaj način problem nalaženja optimalnih mešovitih strategija proizvoljne matrične igre G u potpunosti je rešen.

5.3.2 Parametri tržišnog učešća

Neposredno pre primene modela teorije igara koji smo u prethodnoj tački konstruisali radi primene u marketing - odlučivanju, potrebno je odrediti tzv. **procenjene vrednosti tržišnog učešća**, koje u stvari predstavljaju elemente matrice plaćanja u igri G_A. Ove vrednosti, u opštem slučaju, nije moguće sa sigurnošću i pouzdano odrediti. Iz tog razloga one se najčešće definišu kao slučajne promenljive koje imaju, bar približno, **normalnu raspodelu**. [12] Finkcija gustine u tom slučaju data je sa:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{(x-\mu)^2}{2\,\sigma^2}} \quad x \in \mathbf{R}, \tag{5.34}$$

[12]Ivanova V. M, Kalinina V. N., Nešumova A. L., Rešetkinova L. A.: *Matematičeskaja statistika*, Moskva, 1975.

gde su μ i σ numerički parametri normalne raspodele, koje treba odrediti. Kada je u pitanju odredjivanje parametara μ i σ, menadžment kompanije vrši procenu njihovih vrednosti, čime se sužava mogućnost izbora strategije koja nije optimalna. Da bi se to postiglo potrebno je uzeti u obzir sve neophodne podatke na osnovu kojih se procenjuje promena tržišnog učešća kompanije. Na ovaj način, dobijaju se occenjene vrednosti parametara $\mu_{ij} \in \mathbf{R}$ i $\sigma > 0$ normalno raspodeljenih slučajnih promenljivih a_{ij}. One odgovaraju svakoj pojedinačnoj situaciji matrične igre G_A sa matricom plaćanja $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, pa na temelju toga možemo pisati:

$$a_{ij} \sim N\left(\mu_{ij}, \sigma_{ij}^2\right) \Longleftrightarrow a_{ij} \sim \mu_{ij} \pm \sigma_{ij} \,. \tag{5.35}$$

U narednom koraku, koristeći softversku aplikaciju kojom se simulira model odlučivanja, a koja je za ove potrebe originalno programirana, možemo pristupiti simulaciji postavljenog modela linearnog programa, koja se realizuje u nizu od n sukcesivnih koraka, naprimer, $n = 100, 150, 200, \ldots$. Broj simulacija n zavisi od procene koliko ćemo dobiti dovoljno pouzdane procene potrebnih parametara. Svaka simulacija pojedinačno, tj. sve realizovane vrednosti promenljivih a_{ij} predstavlja verovatnoću promene tržišnog učešća izraženog u procentima, koja se javlja kao posledica kombinacije odgovarajućih strategija prvog i drugog igrača u igri G_A.

Dakle, ove softverski simulirane vrednosti čine elemente matrice plaćanja A, odnosno parametre kojima se formira odgovarajući model linearnog programiranja. Na taj način, rešavajući ovako postavljen model linearnog programiranja dolazimo do optimalne strategije, odredjene na osnovu datog skupa simulacija. Naravno, optimalne strategije koje, uz primenu odgovarajućeg softvera, dobijamo kao rezultat ponavljanja postupka simulacija, medjusobno variraju, što nam omogućuje formiranje njihovih **distribucija** frekvencija. Tada se optimalna strategija u ovako konstruisanom modelu odredjuje na osnovu **aritmetičkih sredina** formiranih distribucija.

5.4 Softverska implementacija i primena modela

Kao primer, za ilustraciju modela odlučivanja u marketingu, koji smo u prethodnim tačkama opisali, iskoristićemo rezultate istraživanja do kojih smo došli u preduzećima **RODA MERKATOR** i **IDEJA** u Knjaževcu, na čemu im ovom prilikom zahvaljujemo, a koja dele odredjeni segment tržišta robe široke potrošnje.

Da bi povećali tržišno učešće menadžmenti oba preduzeća pokreću kampanju reklamiranja svojih proizvoda koji se nude na tržištu. S obzirom da je ukupna prodaja limitirana kupovnom moći potrošača, to se tražnja jednog preduzeća može povećati jedino preuzimanjem dela tržišta koje drži konkurent, pa je od posebnog značaja odabrati pravu strategiju reklamiranja. Dalje, može se predpostaviti da će menadžmenti obe kompanije započeti kampanju reklamiranja na svakom od tri moguća medija: novinama, radiju i televiziji. Na taj način, može se formirati matrica plaćanja formata 3×3 u koju ulaze procenjene vrednosti svih efekata, tj. svih mogućih kombinacija strategija sa procentnom promenom tržišnog učešća datog preduzeća, kao i procenjene vrednosti standardne devijacije tržišnih efekata.

Prema rezultatima istraživanja, matrica plaćanja preduzeća **RODA**, kao prvog, u odnosu na preduzeće **IDEJA** kao drugog igrača, u kojoj su navedene procenjene vrednosti očekivanja i standardnih devijacija u procentima promena njenog tržišnog učešća, glasi:

$$A = \begin{bmatrix} 0,5 \pm 0,1 & 2,5 \pm 0,3 & -1,5 \pm 0,2 \\ 1,5 \pm 0,2 & -0,5 \pm 0,1 & 0,5 \pm 0,1 \\ -0,5 \pm 0,1 & 0,5 \pm 0,1 & 1,5 \pm 0,2 \end{bmatrix} \tag{5.36}$$

Dakle, elementi matrice plaćanja A dobijaju se na slučajan način, ka realizacije normalno raspodeljenih slučajnih promenljivih sa gore navedenim procenjenim vrednostima matematičkog očekivanja i standardnih devijacija procentualnih promena tržišnog učešća. Pritom, strategije preduzeća **RODA** rasporedjene su kao vrste, a strategije preduzeća **IDEJA** po kolonama matrice plaćanja A. Za oba preduzeća odgovarajuće strategije predstavljaju njihovu odluku da svoje proizvode reklamiraju, redom, u novinama - prva vrsta i kolona, zatim na radiju - druga vrsta i kolona a na kraju na Televiziji - treća vrsta i kolona. To preciznije znači da vrednost $a_{11} \sim 0,5 \pm 0,1\%$ predstavlja procetni iznos povećanja tržišnog učešća prvog igrača tj. preduzeća **RODA** u odnosu na preduzeće **IDEJA**, kao drugog igrača, ukoliko oba preduzeća kao svoju strategiju odaberu reklamiranje u novinama. Slično, naredna vrednost matrice $a_{12} \sim 2,5 \pm 0,3\%$ pokazuje procentni iznos smanjenja tržišnog učešća preduzeća **RODA** ukoliko ona izabere reklamiranje u štampi, a konkurentska firma izabere reklamiranje na radiju itd.

Na ovaj način, stvorene su neophodne predpostavke za primenu napred opisane procedure nalaženja optimalnih strategija obeju suprostavljenih kompanija. Formalno, sam postupak možemo iskazati algoritmom koji se sastoji iz sledećeg niza iterativnih koraka:

Korak 1: Za $k = 1, 2, \ldots, n$ treba ponoviti sledeće korake.

Korak 2: Izračunati k- tu realizaciju igre G_A sa matricom $A = [a_{ij}]$, gde je $a \sim N(\mu_{ij}, \sigma_{ij})$ i označimo ih sa $A[k]$.

Korak 3: Odrediti minimum funkcije cilja $F_1(\mathbf{x})$ uz ograničenje

$$A[k]^T \cdot \mathbf{x} \geq \mathbf{1}_{n\times 1},$$

a dobijeno rešenje minimizacije označite sa $\mathbf{x}^*[k]$, a minimum funnkcije sa $F_1(\mathbf{x}^*) = F_1^*[k]$.

Korak 4: Slično kao u prethodnom koraku, stim što sada rešavamo dualni problem, tj. odredjujemo maksimum funkcije cilja $F_2(\mathbf{y})$ uz ograničenje

$$A[k] \cdot \mathbf{y} \leq \mathbf{1}_{m\times 1},$$

a dobijeno rešenje označite sa $\mathbf{y}^*[k]$.

Korak 5: Računamo $\mathbf{p}^*[k] = v^*[k] \cdot \mathbf{x}^*[k]$ i $\mathbf{q}^*[k] = v^*[k] \cdot \mathbf{y}^*[k]$, kada je $v^*[k] = F_1^*[k]^{-1}$

Korak 6: Sledeći k.

Implemetacija softvera koji je opisan u napred navedenih koraka od 1 - 6, rezultat je originalnog rada autora[13] a napisan je u statističkom programu $''\mathbf{R}''$. za ovu svrhu koristili smo slučajne brojeve generisane algoritmom za generisanje članova matrice A kao i Nilder - Mead's metod optimizacije koji je takodje realizovan u statističkom programu $''R''$. Primenom ovih postupaka u našem modelu nakon $n = 100$ simulacija jednako raspodeljenih slučajnih promenljivih a_{ij} dobili smo procenjene vrednosti optimalnih strategija p^* i q^* kao i procenjene vrdnosti igre v^*.

5.4.1 Postoptimalna analiza

U sledećem koraku ispitali smo njihova stohastička svojstva, odnosno empirijske raspodele realizacija p^* i q^* i opisali realizaciju nekih slučajnih promenljivih sa odgovarajućom distribucijom. Empirijske distribucije, histogram sa odgovarajućim empirijskim funkcijama gustine, dobijenih procena prikazane su na slici 5.2

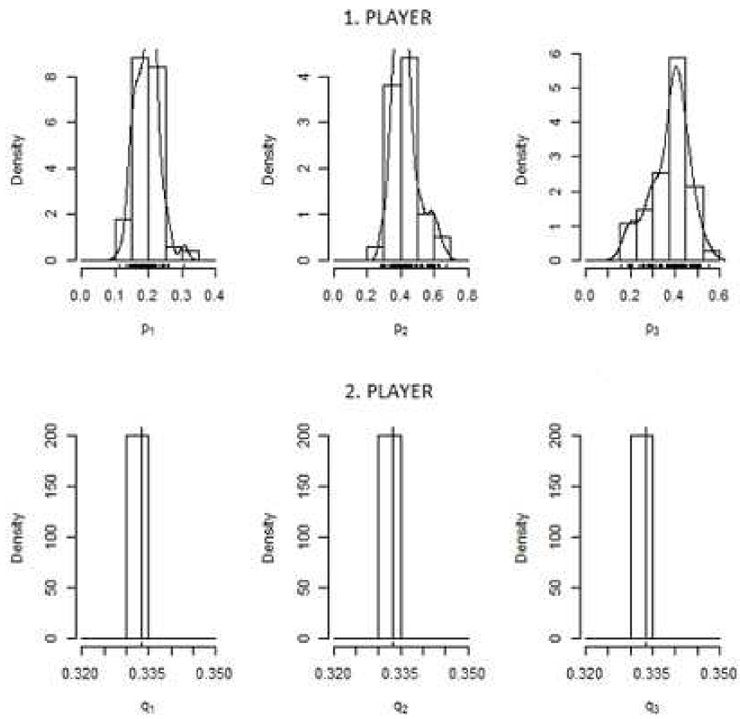
Kao što možemo videti procene strategija prvog igrača, tj. kompanije **RODA**, pokazuju neke varijabilnosti u zavisnosti od vrednostii realizacija normalno distribuiranih slučajnih promenljivih a_{ij} u matrici $A\,[k]$. Sa druge strane, očigledno je da su procenjene vrenosti optimalnih strategija drugog igrača, tj. kompanije **IDEA** ravnomerno rasporedjene, odnosno sve one imaju jednaku verovatnoću uspeha.

Sličan zaključak možemo dobiti od sumarnih statistika koje su prikazane u Tabeli 1. Za optimalni niz strategija p^*, q^*, kao i niz v^*, izračunavamo neke od uobičajenih statističkih parametara kao što su: minimum, maksimum, mediana, standardna devijacija itd. Specijalno, mi smo uzeli sredstva za ove serije kao procenjene, optimalne vrednosti, odnosno procentualne iznose sredstava koja svaka od kompanija treba da uloži u odgovarajući oblik reklame. Optimalne strategije preduzeća **RODA** mogu se iskazati vektorom:

$$\mathbf{p}^* = [0.2067, 0.4290, 0.3643]^T \tag{5.37}$$

čije komponente predstavljaju procentualne iznose sredstava koje ovo preduzeće

[13] Autori su prof. dr Vladica Stojanović, prof. dr Milan Božinović i mr Nina Petković, Prirodno - matematički i Ekonomski fakultet Univerziteta u Kosovskoj Mitrovici, FMZ Zaječar, [76].



Slika 5.2: Empirijska raspodela optimalnih strategija

treba da uloži, redom, u oglašavanje u novinama, na radiju, i televiziji. Sa druge strane, optimalne strategije drugog igrača tj. firme **IDEA**, kao rešenje dualnog problema glase:

$$\mathbf{q}^* = [0.3333, 0.3333, 0.3333]^T . \tag{5.38}$$

Dakle, ovo preduzeće sa jednakim verovatnoćama treba da bira bilo koju čistu strategiju, odnosno, da se na isti način, sa jednakim sredstvima i jednakim ulaganjima reklamira u svaki od navedenih medija. Najzad, u relizovanom modelu dobijena je prosečna optimalna vrednost igre

$$v^* = 0.4600 \tag{5.39}$$

to znači da će preduzeće **RODA**, u idealnom slučaju dobiti 0.46% tržišta koje drži njegov konkurent. Suprotno tome, za drugog igrača, dakle, preduzeće **IDEA**, ista dobijena vrednost igre v^* predstavlja minimalnu vrednost gubitka tržišta, izraženu u procentima.

Statistika	Vred. igre	—Optimalna strategija prvog igrača			—Optimalna strategija drugog igrača		
		p_1^*	p_2^*	p_3^*	q_1^*	q_2*	q_3^*
Min.	0.1580	0.1207	0.2768	0.1112	0.3333	0.3333	0.3333
1st. Qu	0.4126	0.1740	0.3739	0.3158	0.3333	0.3333	0.3333
Median	0.4699	0.2044	0.4106	0.3804	0.3333	0.3333	0.3333
3rd. Qu.	0.5244	0.2340	0.4692	0.4347	0.3333	0.3333	0.3333
Max	0.6867	0.3429	0.6687	0.5499	0.3333	0.3333	0.3333
Mean	**0. 4600**	**0. 2067**	**0. 4290**	**0. 3643**	**0. 3333**	**0. 3333**	**0. 3333**
St. Dev.	0.1058	4.23E - 02	8.59E - 02	8.93E - 02	1.51E - 08	1.91E - 08	1.28E - 08

Tabela 1. Statistika optimalnih strategija i vrednosti igre.

Glava 6

Zaključak

6.1 Potvrda hipoteza

U Glavi 2. ovoga rada, izloženi su osnovni elementi Teorije nelinearnog programiranja, kao jedne od važnijih metoda kvantitavne analize, s'obzirom da je broj nelinearnih problema koji se javlaja u praksi znatno veći od onih koi su linearnogg tipa i samim tim jednostavniji za režavanje. Kako je napred navedeno svaki problem nelinearnog tipa koji se želi modelirati nekim od modela nelinearnog programiranja zahteva specijalnu matematičku pripremu konkretnog matematičkog modela, pošto opšti metod za rešavanje zadataka ovoga tipa ne postoji. Od poznatih ekonomskih parametara - funkcija koje opisuju na mikro planu proces proizvodnje, tražnju, ukupne prihode i rashode i na kraju dobit, mi smo odabrali da u kompaniji **Dheleze group** u Zaječaru, sprovedemo anketu vezanu za prodaju tj. tražnju robe široke potrošnje, od koje smo izdvojili neke karakteristične artikle i pratili njihovu tražnju, sa ciljem da u nelinearnim uslovima ispitamo ponašanje tražnja tj. ispitamo mogućnost povećanja prodaje nekih vrsta roba. S'obzirom da su nam od strane kompanije Dheleze group izašli u susret i omogućili pristup svojim podacime mi smo pristupili realozaciji postavljanog cilja u istražiivanju. S'hodno tome izvršili smo i izbor metodologije kojom će dobijeni podaci biti obradjeni, i naravno, pošto je unapred postavljen princip ponašanja tražnje u nelinearnim uslovima, odabrana je metodologija nelinearnog programiranja. Takodje, u ovom slučaju bilo je neophodno uključiti i druge uslove, kao što su potrebni i dovoljni uslovi Kun - Takera, Teorema Ethovenova, kao i Lagranžeova funkcija, Lagražeovi multiplikatori,nabla operator itd. Uz tako postavljen matematički aparat i rezultati do kojih smo došli u toku istraživanja, nakon konstrukcije odgovarajućeg matematičkog modela kojim bi smo mogli rešiti postavljeni problem, pokazalo se da je u uslovima nelinearnosti moguće znatno povećati prodaju nekih količina robe, što se naravno da i primeniti u opštem slučaju, a ne samo na pojedine artikle čiju smo prodaju pratili. Kao i u drugim slučajevima, mi smo naše rezultate dostavili menadžmentu kompanije **Dheleze group**.

Na ovaj način, i na ovom primeru, mi smo dokazali našu podhipotezu: 1. *Metodom noelinearnog programiranja moguće je izvršiti optimizaciju funkcije ukupnih prihoda* P_u *u nelinearnim uslovima.*

Ekonomja uopšte, posebno ekonomska praksa koja pokušava da nadje egzaktne odgovore na mnoge nepoznate izazove u raznim situacijama susreće se sa jednim opštim problemom. Naime, u ekonomskoj teoriji, sa aspekta kvantitativne analize, problemi koji se javaljaju sa većom učestalošću, uglavnom se mogu klasifikovati u dve klase. Prva klasa obuhvata probleme **linearnog tipa** a druga obuvata one koji to nisu tj. probleme **nelinearnog tipa**. Za probleme linearnog tipa u raznim matematičkim teorijama kao što su Matematička statistika, Teproja verovatnoća, Teorija Haosa i čitav niz drugih, metodom matematičkog modeliranja pojedinih problema kreirani su univerzalni matematički modeli kojima se može rešiti veoma veliki broj upravljačkih zadataka linearnog tipa i to skoro na uniforman način, po gotovo danas kada su za mnoge od njih razvijene i odgovarajuće softvrske aplikacije, što znatno ubrzava njohovo rešavanje.

Medjutim, kada je reč o klasi nelinearnih problema stvar je znatno komplikovanija, pre svega zbog toga što je ova klasa problema znatno brojnija od klase linearnih, i drugo, za ovu klasu ekonomskih problema nije moguće stvoriti opšte i univerzalne matematičke modele kojima bi se svaki od njih mogao rešiti na jedinstven način. Dakle, svaki ekonomskih problem iz klase nelinearnih problema jeste problem za sebe i za svaki od njih neophodno je konstruisati specijalan matematički model. Kad na tu činjenicu dodamo još i njihovu ogromnu dimenziju to nas dovodi do dosta velikog problema tj. ako i uspemo da postavimo odgovarajući matematički model zbog njegove velike dimenzije, tj. veoma velikog broja matematičkih operacija i algoritama koje reba realizovati, što je danas u vreme veoma razvijene računarske tehnike skoro nemoguće. Iz tih razloga u reăsvanju zadtaka nelinearnog tipa neophodno je uklju v citi čitav tim ljudi počev od ekonomista, matematičar programera itd.

Mi smo u ovom radu, s'obzirom da je linearna klasa problema znatno jednostavnija i unificiranija, odlučili da našu pažnju posvetimo nelinearnoj klasi ekonomskim problema i da u okviru jedne kompanije obavimo potrebno istraživanje, u ovom slučaju to je bila Fabrika mernih transformatora u Zaječaru, i da metodom Nelinearnog programiranja pokušamo da rešimo neke od organizacionih problema, problema investiranje u proizvodnju nekih artikala kao i da damo odgovore na pitanje da li uopšte treba u neke od njih investirati ili ne. To istraživanje je sprovedeno u navedenoj kompaniji i dobijeni rezultati su prezentirani u Glavi 3. Dinamičko programiranje, kao specijalan slučaj metode Nelinearnog programiranja. Ovim istraživanjem i obradom dobijenih podataka kao i odgovarajućom ekonomskom analizom, mi smo našu podhipotezu:

2. *Metodom dinamičkog programiranja, kao specijalni slučaj nelinearnog programiranja, moguće je izvršiti optimalnu raspodelu sredstava za investiranje,* u potpunosti dokazali.

U ekonomskoj Teoriji problemi i različite konfliktne situacije koje mogu nastati iz potpuno ne predvidjenih razloga ili čak namerno generisani, kao što se u poslednjih nekoliko godina desila ekonomska kriza koja je produkt spekulacija na svetskim finansijskim i drugim tržištima, pad cena akcija na berzama, zatim pad cena nafte do najnižih granica da bi se ugrozile ekonomije nekih zemalja, nije lako predvideti adhok način i naći odgovarjuće optimalno rešenje. Dakle, iskustvena je činjenica da su problemi ovakvog tipa haotični i pre svega ne predvidivi. Medjutim, odgovarajuće matematičke teorije i njihove primene mogu na neki način predupredditi moguće turbulencija nacionalnih ekonomija, kao što je inflaacija domaćih valuta, pad cena akcija na berzama itd.

U okviru ovoga rada mi smo se bavili primenom jedne od takvih metoda. U pitanju je Teorija Markovljevljevih lanaca, kojom se mogu davati razne prognoze o raznim kretanjima i ponašanju nekih ekonomskih parametara, na primer, na finasijskim tržištima, berzama itd. U ovom radu razmatrana je primena ove teorije na primeru Beogradske berze gde smo posmatrali kretanje prinosa akcija odabranih 10. kompanija i na osnovu dobijenih rezultata dali prognozu najboljih kretanja prinosa akcija pojedinih kompanija i na taj način dokazali podhipotezu:

3. *Metodom Markovljevih lanaca moguće je dati prognozu promena raznih ekonomskih parametara, kao što je: promena prinosa akcija na berzi, ponašanje potrošača itd.*

Matematičke teorije i pojedini njihovi modeli koji su korišćeni u toku izrade ovoga rada predstavljaju jedan veoma mali deo matematičkog aparata koji istraživačima stoji na raspolaganju i kao takvi predstavljaju izazov i motivaciju za nova istraživanja kako u njihovoj primeni, tako i razvoju novih mtodologija kao njihove nadgradnje i uopštenja. S'obzirom na veoma ubrzan razvoj računarske tehnike i softvera, otvara se jedna potpuno nova dimenzija u istraživačkim projektima, o kojima ranje nije moglo ni da se govori. Neke od takvih ideja realizovane su u okviru teme ove doktorske disertacije. Naime, za potrebe ovoga rada razvijen je jedan originalni softver za simulaciju nekih statističkih parametara u modelu Teorije igara koji je kreiran za potrebe odlučivanja u menadžmentu, Glava 5. Na taj način potvrdjena je jedna od postavljenih podhipoteza:

4. *Matematičke modele Teorije igara moguće je primeniti u optimizaciji raznih ekonomskih situcija kao što je, na primer, marketing odlučivanje.*

U ovom slučaju osim matematičkog modela koji je originalna kombiinacija Teorije igara, Matematičke statistike ii Linearnog programiranja, kreirana je i odgovarajuća originalna softverska aplikacija koja rešava postavljeni zadatak u ovom slučaju u marketing odlučivanju. S'obzirom da se radi o univerzalnom modelu, on se kao takav može, osim marketinga, primeniti i u raznim drugim situacijama u oblasti ekonomije ili u nekoj drugoj naučnoj disciplini.

Na kraju, pored teorijskog aspekta teme koju smo istraživali, empirijski deo u kome smo, na konkretno odabranim kompanijama dobili originalne rezultate postavljene pomoćnim hipotezama čiji je dokaz očigledan, na taj način dokazana je i glavana hipoteza koja glasi:

Prilagodjavanjem nekih poznatih matematičkih modela kvantitativne analize, kao i razvojem novih, moguće je izvršiti optimizaciju raznih konfliktnih situacija u poslo vnim procesima.

6.2 Doprinos

Rezultati naučno-istraživačkog rada do kojih se došlo tokom rada u okviru teme: **Matematički modeli optimizacije poslovnih procesa**, pored upotrebe dela poznatuh teorija, predstavljen je i originalan veoma širok aspekt primene kako pojedinih matematičkoh modela tako i originalno konstruisanih softverskih aplikacija za rešavanje nekih od opisanih modela, što je od velikog značaja za primenu u praksi. Što se tiče doprinosa ove disertacije, u opšte, on se može globalno klasifikovati u dve celine i to: **Naučni** i **društveni doprinos**.

6.2.1 Naučni doprinos

Kada je reč o naučnom doprinosu i karakteru ove teze pokazalo se da su metodologije i neki matematički modeli opisani u okviru ovog rada od posebnog značaja za primenu u raznim mikro i makro analizama, posebno kada su u pitanju finasijska tržišta, tržišta hartija od vrednosti, tržište nekretnina, berze itd. Na mikro nivou, u ovom radu takodje su date ideje i mogućnosti primene nekih od teorija kao što je Teorija igara i njena primena u marketing odlučivanju, a opisana je u Glavi 4. Ona predstavlja kombinacijeu Teorije igara, linearnog programiranja i matematičke statistike, i predstavlja originaln model autora ovoga rada, koji za logistiku takodje ima originalan softver koji sam rešava čitav matematički model, tj, nalazii optimalne strategije svih učesnika u igri, konstruiše matematički model linearnog programiranja, kako stadardni problem maksimuma tako i dualni problem, kojim se praktično izračunavaju optimalne strategije i na kraju sam generiše neke parametre funkicije gistine raspodele verovatnoća da bi na samom kraju u zadnjem koraku izračunao vrednost igre, čime je zadatak u potpunosti rešen. Jedan takav primer dat je na primeru dveju kompanija: **Ideja** i **Roda** Merkator u Knjaževcu, gde je ilustrovan rad ovog modela kao i softvera na primeru podele tržišnog učešća ove dve kompanije u funkciji reklama svojih proizvoda.

Ovaj model, kao i mnogi drugi, predstvalja opšti algoritam za rešavanje ovakvih i sličnih problema u bilo kojoj drugoj situaciji ili naučnoj oblasti, što je svakako važan doprinos teorijskoj nauci kvantitativne analize i operacionih istraživanja.

Osim ovoga značajan naučni doprinos u ovom radu pokazan je na primeru metode Nelinearnog i dinamičkog programiranja, kao specijaln slučaj metode NLP-a, u optimizaciji funkcije prihoda $P_u(x)$ u nelinearnim uslovima, a ti rezultau su objavljeni u radu [66], Fakta univerzitatis Univerziteta u Nišu. Takodje, jedan od važnijih rezultata jeste primena metode dinamičkog programiranja na optimizaciji raspodele investicionih sredstava u fabrici mernih transformatora u Zaječaru, gde se došlo, ne samo, do originalnih rezultata u vezi sa raspodelom sredstava koja su planirana za investiranje već i do dela analize proizvodnje u smislu šta jeste a šta nije rentabilno proizvoditi, što je menadžment fabrike veoma dobro prihvatio.

Posebno treba istaći primenu Teorije Markova, specijalno Teoriju Markovljevih lanaca na primeru Beogradske berze, gde je odabrano 10. kompanija i pomoću navedene teorije izvršena je analiza prinosa akcija kompanija koje su razmatrane, što je od velikog značaja za potencijalne investitore koji bi eventualno uložili u neku id njih.

6.2.2 Društveni doprinos

U okviru konstrukcije plana istraživanja zadane teme analizom dosadšnjih rezultata koji su objavljeni po raznim domaćim i medjunarodnim časopisima, a koji se bave ovom problematikom, došli smo do problema koje ćemo istraživati, čime se široj javnosti, koja se bavi ovim problemima ukazuje na mogućnost primene, ne samo u radu opisanih metodologija i matematičkih modela, već i na čiitav niz drugih. Na taj način ova doktorska disertacija otvara nove moguńosti za dalja istraživanja koja su značajna za nove doktorante i druge istraživače koji se bave ovom i sličnom problematikom. To se, pre svega, odnosi na mogućnost raznih uopštenja i modifikacija pojedinih matematickih modela kao i kreacije novih, polazeći od meodela koji su opisani u okviru ovoga rada i ne samo od njih. Na kraju, svaka doktorska disetacija, pa i ova, je od velikog društvenog značaja jer stvara nove mlade istraživače čiji će rezultati u svakom slučaju doprineti razvoju, pre svega, privrede, ekonomije a na taj način i razvoju društva u celini.

Osim toga, radovi ovakve vrste treba da iniciraju motivaciju kod drugih studenata za obrazovanjem, napredkom u nauci, s'obzirom na nove temelje i principe na kojima se gradi, ne samo naše društvo, već društvo u globalnom smislu, specijalno kada je ekonomija u pitanju, a reč je o **ekonomiji zasnovanoj na znanju**.

Na kraju, u savremenoj ekonomiji odluke koje treba da donosi menadžment kompanije više ne mogu da budu bazirane na iskustvu, već savremeni menadžment mora da poseduje, osim znanja kvantitavne analize, i ozbiljna informatička znanja, kako bi odluke koje donese bile optimelane i ne bi proizvodile štetne posledice po kompanije kojima rukovode. Stim u vezi ovakvi i slični radovi imaju ogroman edukativni značaj, pa na taj način i važan društveni doprinos.

6.2.3 Buduća istraživanja

S'obzirom na veoma brz razvoj matematičkog aparata koji se odnosi na primenu u raznim oblastima nauke, pre svega kvantitativne analize, operacionih istraživanja , matematičke statistike koje su logistički podržane informacionim tehnologijama i stvaranjem novih i bržih softverskih aplikacija, razvoj ekonomije uopšte dobija sve veće ubrzanje, što za posledicu ima veoma visoka znanja kod upravljačkog menadžmenta, to i jeste motivacija istraživačima za novim rešenjima, kako u teorijskoj nauci tako i u primenama. Na taj način ovaj rad otvara dovoljno mogućnosti novim istraživačina za potragom novih rešenja, modifikacijom postojećih kao i njihovom primenom.

U tom smislu možemo navesti kao moguće pravce daljag istraživanja koja ova disertacija daje sledeće:

1. Uopštenja modela koji je u Glavi 5. opisan, a odnosi se na odlučvanje u marketingu primenom Teorije igara. Ovaj model moguće je proširiti i na druge naučne discipline u nekim konkretnim situacijama uz naravno potrebne modifikacije. Osim toga primenom Teorije igara može se konstruisati matematički model raspodele resursa, na primer ljudskih, što je od velikog značaja za Armiju u slučaju ratnih operacija i raspodele svih postojećih resursa kojma se raspolaže u datom trenutku, ljudstva tehnike i raznih drugih orudja.

2. Matematički model linearnog programiranja koji je korišćen u predhodnom modelu, može se primeniti i u drugim oblastima Teorije igara uz odgovarajuće modifuikacije, a onda kao takav i u drugim naučnim disciplinama.

3. Modeli Teorie igara imaju zančajnu primenu u Biologiji, konkretno u DNK analizi.

4. Model Dinamičkog programiranje može se primeniti u bankarstvu kod izbora projekata kji bi bili finansirani od strane banke, kod raspodela investicija, itd. Takodje, može se konstruisati model dinamičkog programiranja za raposdeli reasursa, slično kao u Teoriji igara.

5. Uz model Markovljevih lanaca moguće je konstruisati neke druge modele koji uključuju problem rizika, kao parametra, kojeg u Markovljevim lancima nema, što bi stvorilo mogućnost njegove diversifikacje, tj. svodjenja na najmanju moguću meru.

6. Na kraju, nelinearno programiranje daje najveće mogućnosti za nova istraživanja i konstrukciju novih modela optimizacije u nelinearnim okolnostima jer je broj ekonomskih problema, i ne samo ekonomskih, znatno veći od problema linearnog tipa za koje su već kreirani neki standardni modeli optimozacije kao što su Simpleks metod, Model transporta itd.

6.3 Publikovani rezultati

Autor ove disertacije objavio je sledeće naučne radove a koji su sastvni deo ovoga rada.

[1]. Stojanović V, Božinović M, Petković N.: *Softvare implementacion of the model of game theory in marketing decisions*, Medjunarodna konfernecija MIT, Vrnjačka Banjaj Prirodno-matematički fakultet K. Mitrovica i institut iz ruske federacije: **Institute of Computational Technologies, Siberian Brunch of the Rusian Academy of Sciences, Novosibirsk, 2013.**, 698 - 706.

[2]. Petković N , Božinović M.: *Maximizing sales under conditions of nonlinearity*, Facta Universitatis, Vol.12. N^o 4. 2015, pp 269-278. 2015.

[3]. Petković N, Božinović M.: *The aplicaton of the dynamic programming method in investment optimization*, Megatrend revija, 2016. (u štampi).

[4]. Petković N, Božinović M, Stojanović S.: *Optimizacija prinosa portfolija primenom Markovljevih lanaca*, 2016. (u štampi).

[5]. Petković N, Stojanović S.: *Markov chains aplikation in faculty selection prediction*, 6- internacionalni simpozijum o upravljanju prirodnim resursima, FMZ, Zaječar 2016.

[6]. Božinović M, Jerinić S, Petković N.: *Optimizacija investicionih ulaganja banke metodom dinamičkog programiranja*, International Science Conference IPES - SR 2013, Experiens end perspectives of economic corporation between Serbia and Russia, UDK: 1K-032.31., 415- 413. ,2013.

Literatura

[1] Anderson J.: *Discrete Mathematics with Combinatorics*. Pearson Educations Inc., Prentice Hall, New Jersey. (2004).

[2] Alpha Chiang.:*Fundamental methodes of mathematical economics*, McGraw - Hill, (1984).

[3] Binmore K.: *Game theory-A very Short Introduction*, Oxford University Press Inc, New York, 2007.

[4] Ȧgweugbo S. O. N., Adewole A.P., Aduegbuna A.N. *A Random Walk Model for Stock Market Prices*, Jornal

[5] Arunkumar B.R., Raghu M.S.: *Simulation study of Markov chain models with an application in Cognitive Radio Networks*, IQSR Journal of Engineering (IOSRJEN) V.5 (2015) 53-68 of Matematics and Statistics, 6(3): 342-346,2010.

[6] Barnet A. R., Zigler R. M., Byleen E .K.: *Aplied matematics for business, economics, life sciences and social sciences*. Mate DOO Zagreb, 2006.

[7] Bazaraa M., Shetty C. M.: *Nonlinear Programming - Theory and Algorithms*. John Wiley and Sons, New York. (1979).

[8] Belman R.: *Dynamic Progeaming*,Princeton University Pres, Princeton, 1957.

[9] Bertsekas D. P. : *Nonlinear Programming*, Athena Scientific.(2004).

[10] Bogdanovic.D. G, Trumić M., Stanković V., Antić D., Trumić S. M., Milanović Z.: *MIne Water frommining end smelting basin Bor - a resource for the recover of copper or polluter pf the envoroment*, Tehnicki fakultet Bor, 2013.

[11] Božinović M., Stojanović V,:*Jedna Primena Teorije igara u rešavanju ekološkog konflikta*, Simpozijum o operacionim iistraživanjima, Zlatibor 2007.

[12] Božinović M., Stojanović V.: *Matematichke metode i modeli u ekonomiji preduzeą*. VŠSS, Leposavić, (2005).

[13] Božinović M. : *Operaciona istraživanja*. Ekonomski fakultet Kosovska Mitrovica, (2012).

[14] Božinović M.: *Matematika za ekonomiste*. VŠSS, Leposavić, (2005).

[15] Božinović M, Boičić R.: *Ekonometrija*, Ekonomski fakultet Kosovska Mitrovica, 2016. (u štampi).

[16] Boyd S., Vandenberghe L.: *Convex optimization*. Cambridge University Press, Cambridge. (2006).

[17] Charnes A., Cooper W., Henderson A.: *An Introduction to Linear Programming*. John Wiley & Sons, New York. (1960).

[18] Carmenichael F.: *A Guide to Game Theory*, Pearson Education Limited. Harlow, 2005.

[19] Cvetković D., Simić S.: *Odabrana poglavlja iz Diskretne matematike*. Akademska misao, Beograd. (2002).

[20] Chalco-Cano Y., Lodwick W. A, Osuna- Gmez, Rufin A.-Lizana." *The Karush-Kuhn-Tucker optimality conditions for a class of fuzzy optimization problems*, 2013.

[21] Dantzig G. B. : *Linear Programming and Extensions*. Princeton University Press, Princeton.(1963).

[22] Dai Y., Han D, Dai W.: *Modeling and Computing of Stock Index Forecasting Based on Neural network and Markov Chain*, Hindawi Publishing Corporation

[23] Doubleday K., Esunge J.:*Aplication of Markov Chains to Stock Trends*, Jornal of Matematics and Statistics, 7 (2), pp. 103-106.

[24] Ḟaris V. F. , Van Roy B.: *An aproximate dynamic programing aproach to netvork revemue menagement*, Working paper.

[25] Ferguson T.: *Linear Programming - A Concise Introduction*, htp://www. (2005).

[26] Fulkerson R. D. : *Recent Advances in Matematical Progamming.* Flows in Networks, 319-331. (1963).

[27] Goemans M.: *Linear Programming.* Advanced Algorithms, New York. (1994).

[28] Goodrich M. T., Tamassia R.: *Algorithm Design.* John Wiley & Sons, New York. (2002).

[29] Jones A. J.: *Game theory: mathematical models of conflikt.Mathematics and its aplication*, Chchester: E. Horvoo, 1980., - 389 p.

[30] Hilgers Von, P., Langville N.A.: *The five greatest aplikations of markov chains.*

[31] Ivanova V. M, Kalinina V. N., Nešumova A. L., Rešetkinova L. A.: *Matematičeskaja statistika*, Moskva, 1975.

[32] Wald A.: *Generalization of a theorem by Jon Von Nojmann concerning zero sum twoperson games*, Ann.Mach, 1945, 46 No 2. p. 281-286.

[33] Jones A.J.: *Games theory: mathematical models of conflict*, Mathematics and aplicaation. Chichester : E, Horwood, 1980, 309p.

[34] Ignizio J.P., Cavalier T.M.: *Linear Programming.* Prentice Hall, Englewood. (1994).

[35] Kartašev; Roždestvenskii B.L.: *Matematičeskii analiz*,Nauka, Moskva, 1984.

[36] Karlin S.: *A First Course in Stohastic Processes*, Acadmic Pres New York and Lomdon, 1968.

[37] Klein A.: *Matematical Methods in Theoretical Economics.* Academic Press, New York. (1979).

[38] Koopemans T. C.: *Activity Analysis of Production and Allocation.* Wiley & Sons, New York. (1951).

[39] Kreko B. : *Linearno programiranje.* Savremena administracija, Beograd. (1966).

[40] Kruševskij A.V.: *Teorija igr*, Viša škola Kiev, 1977.

[41] Kuhn H. W, Tucker A. W.: *Linear programing and the theory of games*, Monograph J. Wiley 1951. 332 p.

[42] Kuroš A.G.: *Kurs višei algebri*, Nauka, Moskva, 1975.

[43] Kurepa Dj.: *Viša algebra* 1 *i* 2, Zavod za izdavanje udžbenika, Beograd, 1969.

[44] Kurepa S.: *Matematička analiza* 1, Tehnička knjiga Zagreb,1975.

[45] Kurepa S.: *Matematička analiza* 2, Tehnička knjiga zagreb, 1971.

[46] Kurepa S.: *Matematička analiza* 3, Tehnička knjiga zagreb, 1975.

[47] Kurepa S.: *Konačno dimenzionalni vektorski prostori i primene*, Sveučilišna naklada - Liber, Zagreb, 1976.

[48] Kurnot O.: *Resharches sur les principes mathmatiques de la theorie de richesses* Paris, 1838. - 258 p.

[49] Ljaško I.I.: *Matematička analiza 3*, Viša Škola, Kiev, 1987.

[50] Ljaško I.I.: *Spravočnoe posebie po matematišekomu analizu*, Viša Škola, Kiev, 1986.

[51] Martić, Lj.:*Mtematičke metode za ekonomske analize*, Narodne novine, Zagreb, 1972.

[52] Martić, Lj.:*Primena mtematičkih metoda u ekonomskoj analizi, zbirka zadataka*, Informator, Zagreb, 1971.

[53] Mardešić S.: *Matematička analiza u n dimenzionalnom realnom prostoru* 1, Školska knjiga Zagreb, 1974.

[54] Markov A. A.: *Primer statističeskoga ispitivanja nad tekstom Evgenia Oneginakoga*. Izvestija Akademija Nauka, tom 7., 153-162. 1913.

[55] Milovanović G, Stanimirović P.: *Simbolička implementacija nelinearne optimizacije*, Niš, (2002).

[56] Milovanović I., Milovanović E.: *Diskretna matematika*. Elektronski fakultet, Niš. (2000).

[57] McQueen G., Threly S.: *Are Stock Returs Predictable? A Test Using Markov Chains*, The Jornal of Finance. 46 (1) : 239 - 363.

[58] Mladenović Z, Petrović P.: *Uvod u Ekonometriju*, Ekonomski fakultet Beograd, 2003.

[59] Neš Dž.: *The bergaining problem*, Econometricaa 1950. 18, p 155-162.

[60] Neš Dž.: *Non-cooperative games.*, Ann. Math, 1951, 54 p, 286-295

[61] Von Nojman J.: *On the theori of gamesof strategy*, Prinston University Press, 1959.-453 p.

[62] Vilkas I.: *Aksiomatičeskoe opredelenije situacii ravnovesija i i znaěnia beskoalicionoi igri n-lica*, Teorija verovatn. i primene, 1968. 13, No 3, c. 586-591.

[63] Vorobljev N. N.: *Situacii ravnovasja v bimatričnih igrah*, Teorija verovatnosti i ee primenjenia, 1958., 3. No 3. s. 318-331.

[64] Obradović Lj., Bugarin M., Marinković V.: *Uticaj rudničkoh objekta RTB Bor na zagadjenje okolinih površinskoh vodotokova*, Institut za Bakar i Metalurgiju Bor. 2012.

[65] Osagiede A. A, Ekhosuehi V. U.: *Finding a continuous- time Markov chain via sparse stochastic matrices in manpower systems* Journal of the Mathematical Society 34 (2015) 94-105

[66] Petković N, Božinovic M.: *Maksimizing sales under conditions of nonlenarity*, Facta univerzitatis, No 4., Niš, (2015).

[67] Petković N., Božinović M.: *The Aplication of the Dinamic Programing Method in Investiment optimization*, Megatrend revija, 2016. (u štampi).

[68] Peldschus F.: *Experience of the game theory application in constuction management" Technological and Economic Development of Economy*, 2008., 531.-545.

[69] Prešić S., Prešić M.: *Rešavanje jednačina, nejednačina i formula*. Školska knjiga, Zagreb. (1980).

[70] Preethi G., Santhi B.: *Stock market forecasting techniques: A survey*, Journal of Theoretical and Applied Information Technology (2012) 24-29

[71] Render B., Stair R. : *Quantitative Analysis for Menagment*. Allin and Bacon, London. (1998).

[72] Sazdanović S., Mimović P. : *Ekonomsko-matematički metodi i modeli*. Ekonomski fakultet u Kragujevcu, Kragujevac. (1998).

[73] Satish L, Gururaj BI.: *Use of hidden Markov models for partial discharge pattern classification*. IEEE Transactions on Dielectrics and Electrical Insulation, (April 2003).

[74] Stojanović D.: *Matematichke metode u ekonomiji preduzeq*. Rad, Beograd. (1968).

[75] Stojanović V.:*Matematičko programiranje*, Prirodno - matematički fakultet Kosovska Mitrovica, (2012).

[76] Stojanović V, Božinović M, Petković N.: *Softvare implementacion of the model of game theory in marketing decisions*, Medjunarodna konfernecija MIT, Vrnjačka Banja, 2013.

[77] Svoboda M.,Lukaš L. *Aplication of Markov analysis to trend os stock indices*, Pcoedings of 30th in Economics, Karvina: Silesain Univesity, Shool of Biznos Administractration: 845-853., 2912.

[78] Stojanović, D.:*Matematičke metode u ekonomiji presduzeća* Rad, Beograd, 1986.

[79] Simovič V.: *Syntactic analysis as central phase in work of compiler, Modelling and optimization in the machines building field*, Vol. 16 (2010) No. 2, Romanian technical sciences academy **Vasile Alecsandri University of Bacau**, ISSN 1224-7480, 70-76

[80] Shogan A.: *Managmient Science*. Prentice Hall, New Jersey. (1988).

[81] Todorović O.: *Operaciona istraživanja*. Prosveta, Niš. (1992).

[82] Tourki M.: *Matematički modeli i metodi u ekonomiji*. CID, Ekonomski fakultet, Beograd.(1997).

[83] Vanderbei R. J.: *Linear Programming: Foundations and Extensions*. Kluwer Academic Publishers, Princeton. (1996)

[84] T. L. Turocy and B. Von Stengel.: *Game Theory*, Encycl. Inf. Syst., 2003.

[85] F. Allen and S. Morris.: *Game Theory Models in Finance, in Game Theory and Business Applications*, 2001st ed., Kaylan Chatterjee Pennslvania University and William F. Samuelson Boston University, Ed. Kluwer Academic Publishers Boston.Dordretch-London, 2001, p. 33.

[86] S. B. S. Bai and M. M. M. Mei.: *Evolutionary game analysis on adoption of e-government services*, Web Soc. (SWS), 2010 IEEE 2nd Symp., 2010.

[87] Škrijanić T., Kojić V.: *Modeliranje prinosa dionica na zagrebačkoj berzi pomoću markovljevih lanaca*, Izvorni znansttveni članak, 207 - 220., 2014.

[88] Škrijanić T., Šoštarić N.: *Komplementarnost metodologije Markovljevih lanaca i markoviceva modela optimizacije portfelja*, www.fer.unizig.hr

[89] Zang D. and Adelman D.: *An aproximate dinamic prorammingapproach to network revenue menagement with customer chose*, Transporatcion science, 43.: 381.-394.

[90] Wu H. C.: *The Karush- Kuhn -Tucker optimality conditions for multiobjective programming problems with fuzzy-valued objective functions, Fuzzy Optimization and Desicion Making* 8. (2009) 1.-28.

[91] Wu H.C.: *Duality theorems in fuzzy linear programming problems with Fuzzy Optimization and Decision Making*, 2. 2003. 61.-73.

[92] Wu H. C.: *The Karush- Kuhn-Tucker optimality conditions for the optimization problem with fuzzy-valued objective function*, Math.Meth.Oper. Res .66. 2007. 203.-224.

[93] www.dartmoth.edu

[94] www.fer.unizg.hr

[95] www.stenford.edu/-bvr/psfiles/adp-rm.pdf.

[96] www.fmt.rs

Indeks pojmova